PROGRAMMAZIONE DINAMICA

ASDL1617-TESEI

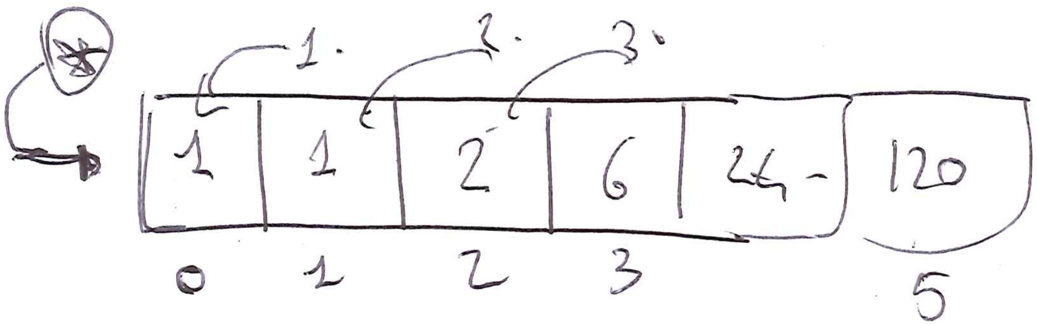
26|01|17
1

PROBLEMA - SOLUZIONE RICORSIVA

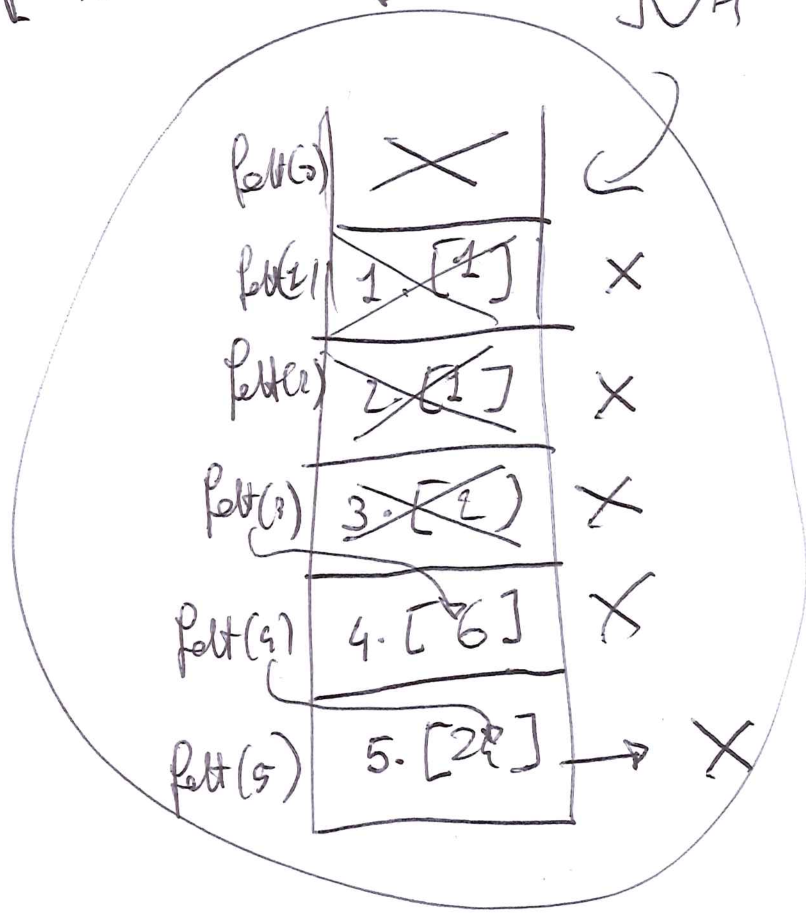
- ~~BOTTOM-UP~~ → (*)
- TOP-DOWN

$$fatt(n) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ n \cdot fatt(n-1) & n>0 \end{cases}$$

$fatt(5) = 5 \cdot fatt(4) = \ldots$



JVM



SEQUENZA DI FIBONACCI

(2)

$$
fibo(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n=0 \\ 1 & \text{se } n=1 \\ fibo(n-1) + fibo(n-2) & \text{se } n>1 \end{cases}
$$

$$
fibo(n) = \left[\frac{\Phi^{i}}{\sqrt{5}} \right] \quad G
$$

*

$O(2^n$

BOTTOM-UP

n	0	1	2	3	4	5	6	...
$fibo(n)$	1	1	2	3	5	8	13	...
$T(n)$	0	0	1	2	4	7	12	

$\llcorner = O(n)$ NEL CASO BOTTOM-UP

n° di addizioni che faccio per calcolare fibo(n)

TOP-DOWN

fibo(6)

fibo(5) + fibo(4)

fibo(4) + fibo(3)

fibo(3) + fibo(2)

$T(0) = 0$

$T(1) = 0$

$$T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1 \quad \epsilon$$

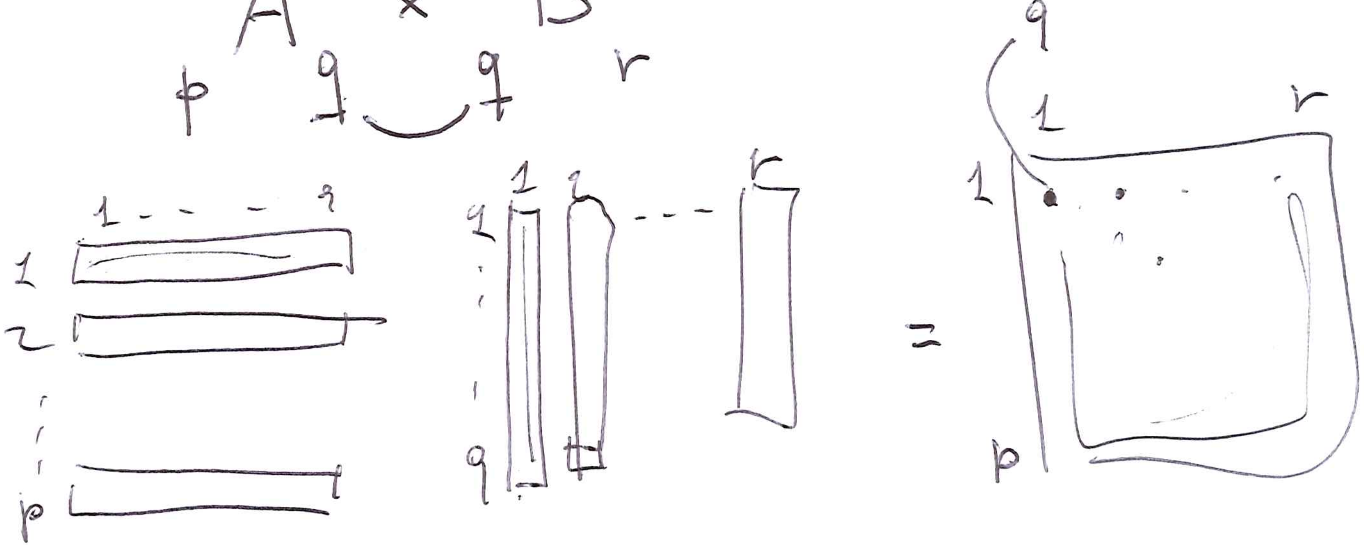
$$T(n) = fibo(n) - 1 = O(2^n)$$ * NEL CASO TOP-DOWN

③ PROBLEMA DI OTTIMIZZAZIONE CON PROGRAMMAZIONE DINAMICA

- def. RICORSIVAMENTE
- SOTTOPROBLEMI COMUNI
- SOTTOSOLUZIONI OTTIME

ESEMPIO Moltiplicazione di n Matrici

$$\underset{p \quad q}{A} \times \underset{q \quad r}{B}$$



COSTO DA MINIMIZZARE: N° DI MOLTIPLICAZIONI SCALARI

$T(A,B) = q(pr) = pqr$

COSTO NEL CASO DI 2 MATRICI

4

$$A^1 \times A^2 \times A^3$$

$$p_0 \quad p_1 \qquad p_1 \quad p_2 \qquad p_2 \quad p_3$$

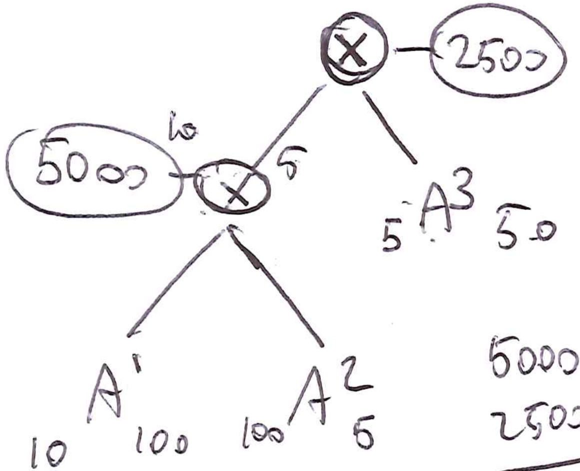
$$10 \qquad 100 \qquad 5 \qquad 50$$

ESEMPIO CON 3 MATRICI

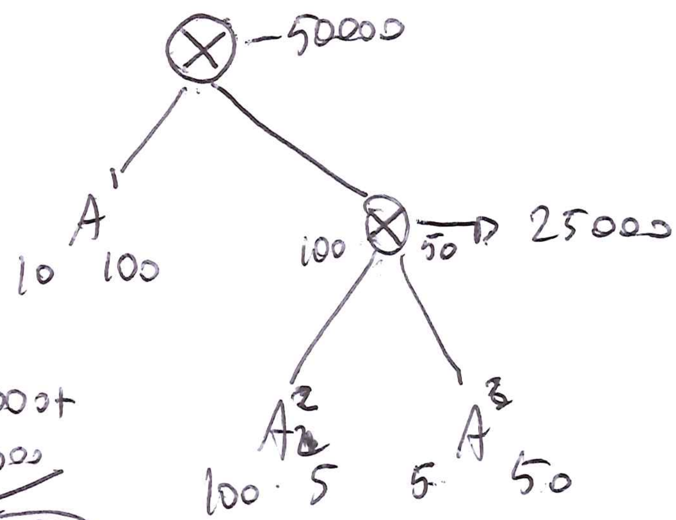
DUE PARENTESIZZAZIONI:

(1) (2)

$$(A^1 \times A^2) \times A^3 = A^1 \times (A^2 \times A^3)$$



$$\begin{array}{r} 5000\ + \\ 2500 \\ \hline 7500. \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 50000\ + \\ 25000 \\ \hline 75000 \end{array}$$

7500 vs 75000!

CASO $n \geq \cancel{2}$

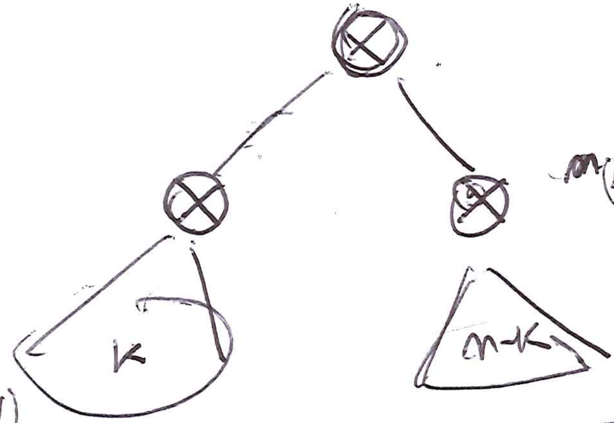
$$ {}_{p_0}A^1_{p_1} \times {}_{p_1}A^2_{p_2} \times \dots \times A^{k} \times \dots \times A^{k+1} \dots \times A^m $$

$$ P(n) = \begin{cases} \cancel{1} & \text{se } n=0 \\ \cancel{1} & n=1 \\ 1 & n=2 \\ & n>2 \end{cases} $$

5

SOLUZIONE FORZA BRUTA:

- ELENCO TUTTE LE POSSIBILI PARENTESIZZAZIONI
- PER OGNUNA CALCOLO IL NUMERO DI MOLTIPLICAZ
- PRENDO IL MINIMO



$n-1$ scelte per K

$$ P(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n=1 \\ \sum_{k=1}^{n-1} P(k)P(n-k) & \text{se } n \geq 2 \end{cases} $$

NUMERI CATALANI

$$ P_n = \Omega\left(\frac{4^n}{\sqrt{n^3}}\right) $$

$O(2^n)$

A^1 ———— A^n

$P(n)$ = NUMERO DELLE POSSIBILI PARENTESIZZAZIONI IN UNA SEQUENZA DI n MATRICI

POSSIAMO FARE MEGLIO CON PROGR. DINAMICA

6

SOLUZIONE: CALCOLARE BOTTOM-UP LA RICORRENZA c[i][j] e s[i][j]

$$c[i,j] \triangleq \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ \min\limits_{i \le k < j} \left\{ c[i,k] + c[k+1,j] + p_{i-1} \cdot p_k \cdot p_j \right\} \ * & \text{se } i < j \end{cases}$$

SOLUZIONE È $O(n^3)$

Tutti valori ottimi di k

matrice delle scelte ottime di k

S

i \ j	1	2	3	4	5	6
1		1				
2			2			
3				3		
4					4	
5						5
6						

$s[i,j] \triangleq \bar{k}$ dove $\bar{k}$ è il valore $i \le \bar{k} < j$ per cui è minima l'espressione *

C

matrice dei costi ottimi

VALORE OTTIMO

i, j

i \ j	1	2	3	4	5	6
1	0					
2		0				
3			0			
4				0		
5					0	
6						0

$\boxed{\text{Test:}}$ $A^1 \times A^2 \times A^3 \times A^4 \times A^5 \times A^6$

$p_0 = 30$, $p_1 = 35$, $p_2 = 15$, $p_3 = 5$

$p_4 = 10$, $p_5 = 20$, $p_6 = 25$