Fondamenti d'Informatica: Introduzione

Barbara Re, Phd

Che cosa si può calcolare?

- **Teoria della Computabilità -** quale strano mostro! ☺

- Diverse sono le risposte possibili …
  - Classiche – basate su Macchine di Turing, grammatiche e funzioni ricorsive
  - Moderne – legate all'evoluzione dei linguaggi di programmazione

Che cosa si può calcolare?

- Il **tema della computabilità** richiama l'idea di **computer** e **calcolatore**
- Computare, o calcolare significa far di conto con i numeri usuali (cioè gli interi 0, +/- 1, +/- 2, … :sommarli, moltiplicarli, calcolare limiti e derivate)
- Tutti i **problemi** che si possono formalizzare tramite **modelli matematici** possono essere **computati**

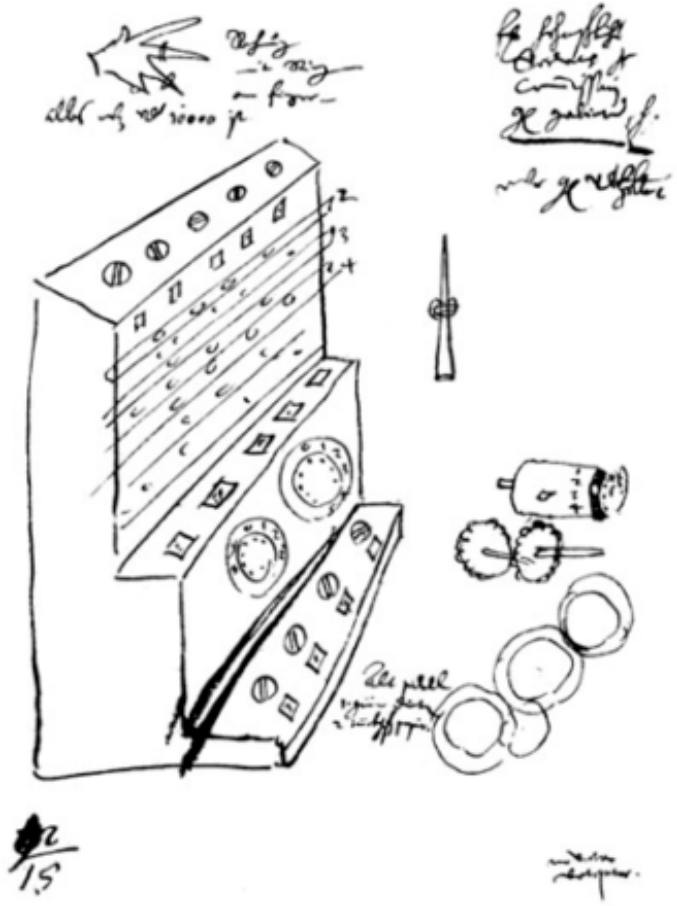
Applicazioni computazionali

- René Descartes (Cartesio) – inizio del seicento
  - Vagheggiava sulla possibilità di tradurre in termini matematici ogni problema, e risolverlo tramite equazioni e computazioni
  - Applicava l'intuizione al campo geometrico

- Gottfied Wilhelm Leibniz – 1666
  - Invitava ad usare conti e computazioni anche per risolvere oggettivamente i conflitti umani
  - Mirava a trasferire le controversie dai ragionamenti complicati ai calcoli semplici, dai vocaboli di significato incerto e vago a caratteri determinati

- Alle applicazioni computazionali si accompagna un tentativo di costruire **macchine calcolatrici** capaci di aiutare a simulare la mente umana nel suo lavoro (tradizionali operazioni si somma, prodotto, sottrazione e divisione)

Macchine calcolatrici: Wilhelm Schickard (1623)

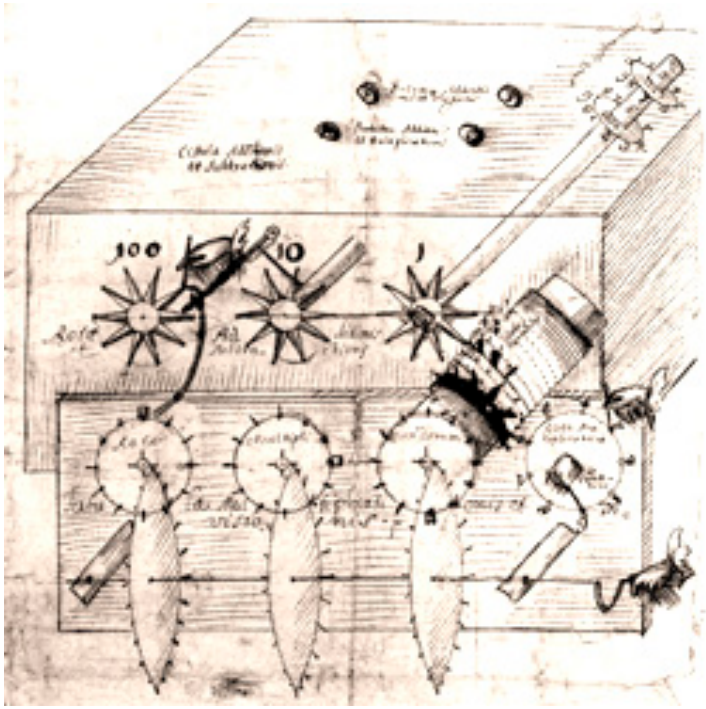


- La macchina poteva sommare e sottrarre numeri fino a sei cifre, e indicava il superamento della sua capacità facendo suonare una campanella.

Macchine Calcolatrici: Blaise Pascal (1643)

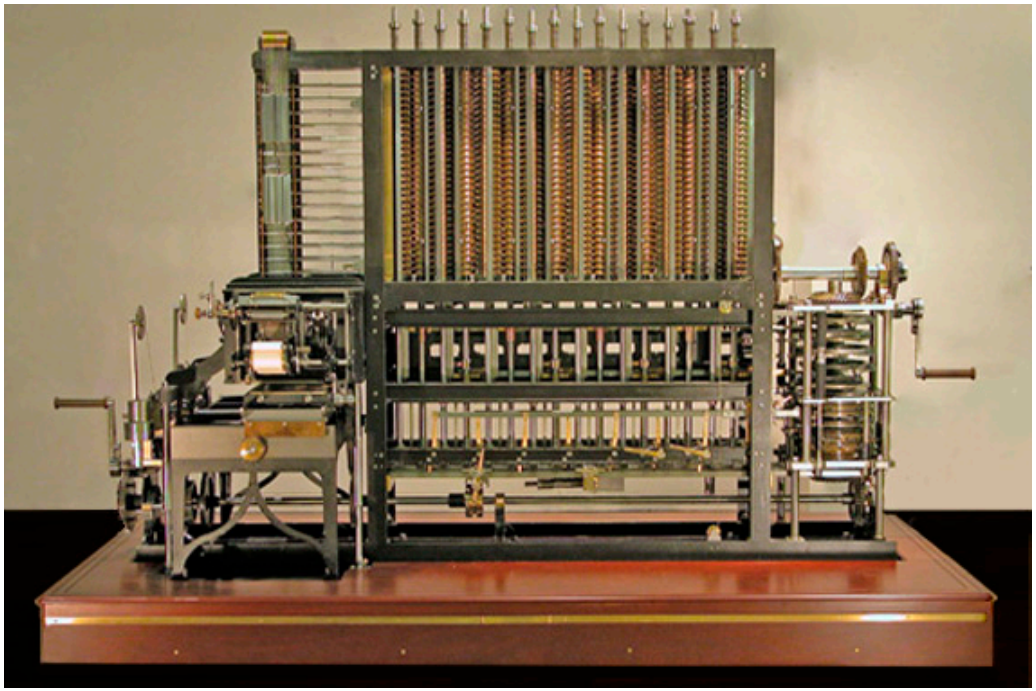
- Essa consente di addizionare e sottrarre fino a otto cifre, tenendo però conto del riporto

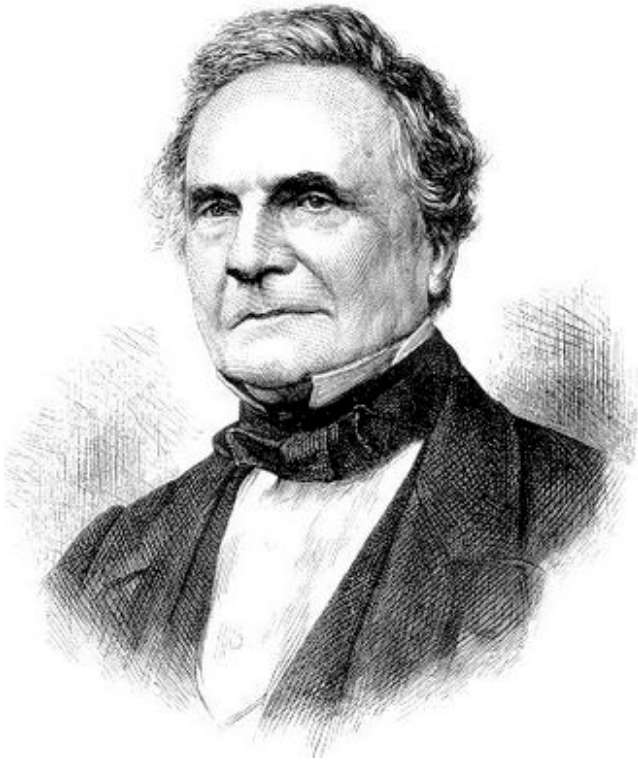
Macchine Calcolatrici: Gottfried Wilhelm von Leibniz (1672)



- Le macchine di Schikcard e di Pascal permettevano solo l'addizione e la sottrazione. **Leibniz affrontò il problema della moltiplicazione!**

Macchine calcolatrici - Charles Babbage (Ottocento)



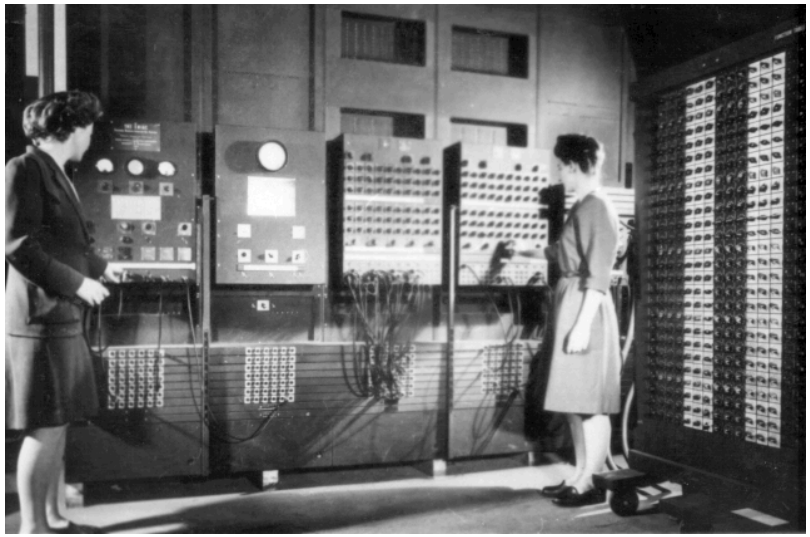


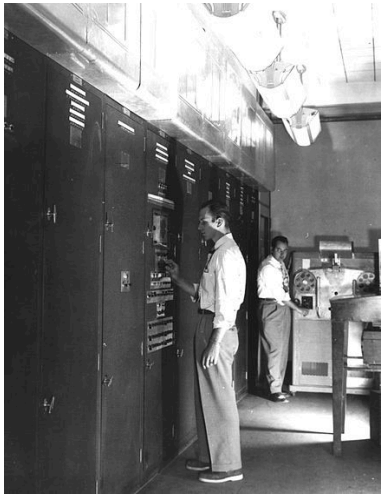
- Concepisce un meccanismo universale chiamato macchina analitica capace di adattarsi a vari contesti (numeri, mosse scacchi, …)
- Video: http://www.computerhistory.org/babbage/

Macchine calcolatrici - Ada Lovelace Byron (Ottocento)

- Incontra Charles Babbage e iniziò a studiare i metodi di calcolo realizzabili con la macchina analitica
- Correla la macchina analitica di quello che ora chiameremo software!
- E' considerata da molti come la prima programmatrice di computer di tutti i tempi!

Primo computer elettronico (1946)





- ENIAC (Electronic Numerical Integrator And Computer) fu progettato e costruito alla Moore School of Electrical Engineering (una ex scuola universitaria dell'Università della Pennsylvania) per il Ballistic Research Laboratory (un ex centro di ricerca dell'esercito degli Stati Uniti d'America) da Prosper Eckert e John Mauchly

- L'EDVAC (Electronic Discrete Variables Automatic Computer) è la prima macchina digitale programmabile tramite un software basata su quella che sarà poi definita l'architettura di von Neumann

Macchine, Linguaggi e Regole

- La teoria della computabilità tratta della definizione formale del concetto di calcolo meccanico
  - Le macchine calcolatrici per attuare le computazioni sono di fatto macchine "calcolatrici meccaniche"
  - Si sviluppa sino alle moderne soluzioni elettroniche
- Fondamentale è la definizione di linguaggi e regole con cui favorire la collaborazione delle macchine
  - Identificare un linguaggio astratto appropriato, con simboli opportuni per cui formulare problemi da rivolvere, per poterli poi proporre alla macchina che li deve computare
  - Identificare le leggi che la macchina deve seguire per svolgere i suoi calcoli

Cosa, Chi, e Come?

- Cosa è computabile?
  - Definizione del problema e di un alfabeto appropriato con cui formalizzare i contenuti
- Chi computa?
  - L'algoritmo che affronta il problema e la macchina che lo svolge
- Come si computa?
  - Le regole che algoritmo e macchina devono rispettare nel loro lavoro

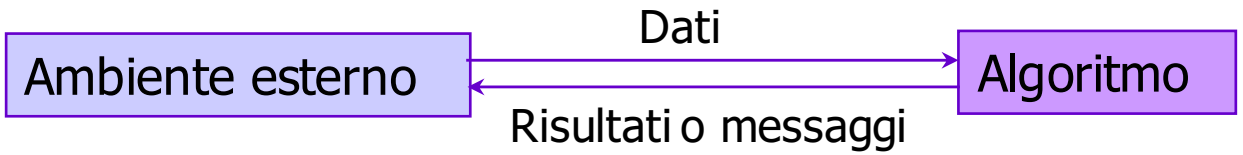
L'alfabeto

- L'alfabeto è una sequenza di simboli finiti che descrivono i termini del problema
- Esempi di alfabeto
  - Lingua Italiana, Lingua inglese, polinomi e coefficienti interi, numeri reali, …

Concordato l'alfabeto si può formulare il problema in modo adeguato e trasmetterlo all'algoritmo e alla macchina calcolatrice per la loro computazione

L'algoritmo

- Algoritmo deriva dal nome del matematico arabo Al Khuwarizmi, vissuto nel IX secolo d.C.
- Un algoritmo è una successione di istruzioni o passi che definiscono le operazioni da eseguire sui dati per ottenere i risultati; **un algoritmo fornisce la soluzione ad una classe di problemi**
- Lo schema di esecuzione di un algoritmo specifica che i passi devono essere eseguiti in sequenza, salvo diversa indicazione
- Ogni algoritmo è concepito per interagire con l'ambiente esterno per acquisire dati e comunicare messaggi o risultati; i dati su cui opera un'istruzione sono forniti dall'esterno o sono frutto di istruzioni eseguite in precedenza



Esempi di algoritmi

- controllo dei voli aerei
- regolazione reattori nucleari
- reperimento d'informazioni da archivi
- smistamento di comunicazioni telefoniche
- gioco degli scacchi
- controllo della produzione di una catena di montaggio
- sistemi di puntamento di missili
- …

Correttezza e Efficienza

- Ovunque si impieghi un calcolatore elettronico occorrono algoritmi **corretti** e **efficienti** che ne utilizzino al massimo le possibilità

- Un algoritmo si dice **corretto** se, per ogni istanza di input, si ferma con l'output corretto

- Un algoritmo **corretto** risolve il problema computazionale dato

- Un algoritmo **efficiente** risolve il problema computazionale il più velocemente possibile e organizza i dati in modo da usare il minor spazio di memoria possibile

Condizioni di un sistema di computazione

1. Un algoritmo è di lunghezza finita
2. Esiste un agente di calcolo (la macchina calcolatrice) che sviluppa la computazione eseguendo le istruzioni dell'algoritmo
3. L'agente di calcolo ha a disposizione una memoria, dove vengono immagazzinati i risultati intermedi del calcolo
4. Il calcolo avviene per passi discreti
5. Il calcolo non è probabilistico
6. Non deve esserci alcun limite finito alla lunghezza dei dati in ingresso
7. Non deve esserci alcun limite finito alla quantità di memoria disponibile
8. Deve esserci un limite finito alla complessità delle istruzioni eseguibili dal dispositivo
9. Il numero di passi della computazione è finito ma non limitato
10. Sono ammesse computazioni senza fine

Condizioni di un sistema di computazione

1. Un algoritmo è di lunghezza finita
2. Esiste un agente di calcolo (la macchina calcolatrice) che sviluppa la computazione eseguendo le istruzioni dell'algoritmo
3. L'agente di calcolo ha a disposizione una memoria, dove vengono immagazzinati i risultati intermedi del calcolo
4. **Il calcolo avviene per passi discreti**
5. Il calcolo non è probabilistico
6. Non deve esserci alcun limite finito alla lunghezz
7. Non deve esserci alcun limite finito alla quantità di memoria disponibile
8. Deve esserci un limite finito alla complessità delle istruzioni eseguibili dal dispositivo
9. Il numero di passi della computazione è finito ma non limitato
10. Sono ammesse computazioni senza fine

Il calcolo non avviene attraverso dispositivi analogici, ma si svolge ordinatamente, un passo dietro l'altro

Condizioni di un sistema di computazione

1. Un algoritmo è di lunghezza finita
2. Esiste un agente di calcolo (la macchina calcolatrice) che sviluppa la computazione eseguendo le istruzioni dell'algoritmo
3. L'agente di calcolo ha a disposizione una memoria, dove vengono immagazzinati i risultati intermedi del calcolo
4. Il calcolo avviene per passi discreti
5. **Il calcolo non è probabilistico**
6. Non deve esserci alcun limite finito alla lunghezz
7. Non deve esserci alcun limite finito alla quantità di memoria disponibile
8. Deve esserci un limite finito alla complessità delle istruzioni eseguibili dal dispositivo
9. Il numero di passi della computazione è finito ma non limitato
10. Sono ammesse computazioni senza fine

Il calcolo non è soggetto a fattori casuali, ma si svolge in modo assolutamente preciso e rigoroso (anche detto deterministico)

Condizioni di un sistema di computazione

1. Un algoritmo è di lunghezza finita
2. Esiste un agente di calcolo (la macchina calcolatrice) che sviluppa la computazione eseguendo le istruzioni dell'algoritmo
3. L'agente di calcolo ha a disposizione una memoria, dove vengono immagazzinati i risultati intermedi del calcolo
4. Il calcolo avviene per passi discreti
5. Il calcolo non è probabilistico
6. **Non deve esserci alcun limite finito alla lunghezza dei dati in ingresso**
7. Non deve esserci al
8. Deve esserci un lim
   dispositivo
9. Il numero di passi d
10. Sono ammesse com

L'input del problema può essere arbitrariamente lungo (ad esempio, un algoritmo di somma tra gli interi si deve applicare ad ogni possibile addendo, quindi ad ogni numero intero, comunque grande)

7. Non deve esserci alcun limite finito alla quantità di memoria disponibile

- Si asserisce alla possibilità di accedere ad una memoria potenzialmente illimitata

- Sarà mica vero?
  - Proviamo a pensare che cosa accade in caso contrario, se ammettiamo di limitare preliminarmente ad un livello uniforme prefissato le potenzialità della memoria
  - In queste condizione può capitare che algoritmi anche elementari, costruiti per eseguire semplici computazioni si trovino nell'impossibilità di completarle
  - Ad esempio, la funzione che ad ogni intero associa il suo quadrato f(x) = x2 non è più calcolabile perché lo spazio di memoria necessario per computare il quadrato di x dipende ovviamente da x e dunque, per x molto grande, si trova ad infrangere i limiti eventualmente prefissi
- Tutto ciò per dire che l'assunzione fatta è del tutto plausibile!

8. Deve esserci un limite finito alla complessità delle istruzioni eseguibili dal dispositivo

- Si ribadisce quanto evidenziato dal punto 1 "Un algoritmo è di lunghezza finita" relativamente al numero delle istruzioni
- Si conferma che anche per la complessità delle singole istruzioni ci deve essere un limite
- Solo una porzione finita della memoria dell'agente di calcolo deve essere occupata da queste istruzioni iniziali al momento in cui la computazione su un dato input si avvia
- Non contraddice la condizione 7 -> che riguarda i successivi passi di calcolo e afferma la possibilità di accogliere senza limite le informazioni nella restante parte della memoria

Anche la mente umana è intrinsecamente limitata ma ha delle potenzialità illimitate di crescita

Condizioni di un sistema di computazione

1. Un algoritmo è di lunghezza finita
2. Esiste un agente di calcolo (la macchina calcolatrice) che sviluppa la computazione eseguendo le istruzioni dell'algoritmo
3. L'agente di calcolo ha a disposizione una memoria, dove vengono immagazzinati i risultati intermedi del calcolo
4. Il calcolo avviene pe
5. Il calcolo non è pro
6. Non deve esserci a
7. Non deve esserci a
8. Deve esserci un limite finito alla complessità delle istruzioni eseguibili dal dispositivo
9. **Il numero di passi della computazione è finito ma non limitato**
10. Sono ammesse computazioni senza fine

Non è possibile stabilire a priori un limite massimo per il numero dei passi richiesti per eseguire un generico algoritmo su un certo input

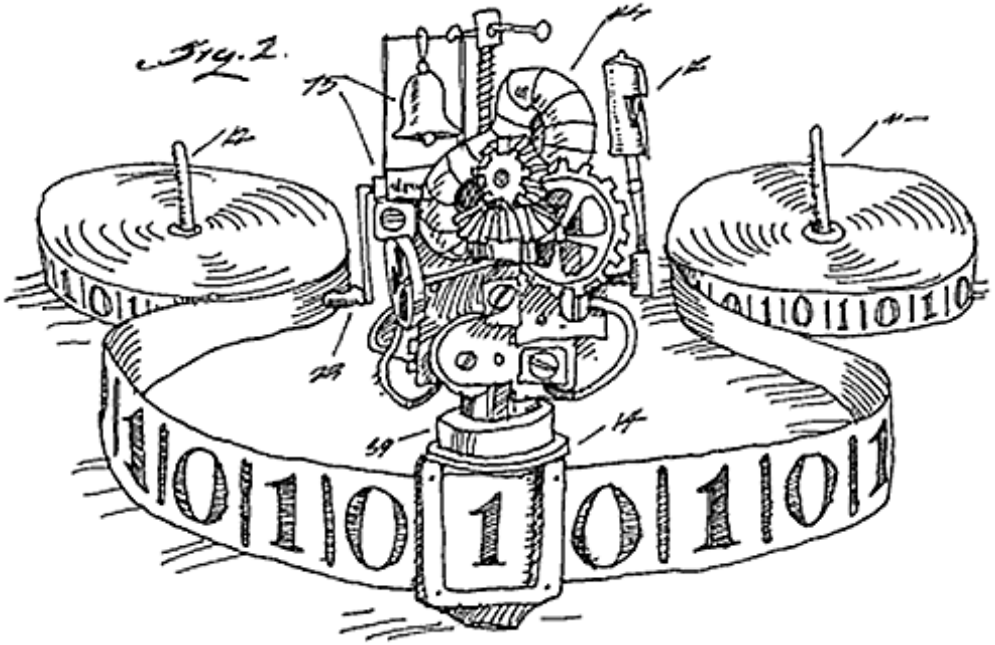
Condizioni di un sistema di computazione

1. Un algoritmo è di lunghezza finita
2. Esiste un agente di calcolo (la macchina calcolatrice) che sviluppa la computazione eseguendo le istruzioni dell'algoritmo
3. L'agente di calcolo ha a disposizione una memoria, dove vengono immagazzinati i risultati intermedi del calcolo
4. Il calcolo avviene per passi discreti
5. Il calcolo non è pr
6. Non deve esserci a
7. Non deve esserci a
8. Deve esserci un lir
   dispositivo
9. Il numero di passi della computazione è finito ma non limitato
10. **Sono ammesse computazioni senza fine**

Esiste l'eventualità di dover affrontare problemi senza soluzione, in tal caso la computazione è destinata a prolungarsi indefinitivamente senza produrre risposte soddisfacenti

Alan Turing e la sua macchina!

- Sul decalogo proposto, Alan Turing affrontò il problema di definire rigorosamente che cosa possa intendersi per computabile
  - Definito un semplice modello di calcolatore: la Macchina di Turing
  - Computabile è esattamente quando una macchina di Turing riesce a computare



Formalismi

- Alcuni importanti formalismi che hanno storicamente condizionato la teoria e l'applicazione dei calcolatori:
  - Le macchine di Turing
  - Gli schemi ricorsivi di Kleene e McCarthy
  - … altri più moderni legati ai linguaggi di programmazione

L'EDVAC è capace eseguire calcoli balistici, meteorologici o sulle reazioni nucleari, ma è una macchina limitata, quasi del tutto priva di memoria e di elasticità, che può eseguire solo operazioni predeterminate … Per migliorarla bisogna utilizzare l'intuizione che aveva avuto Alan Turing una decina d'anni prima nel suo articolo sui numeri computabili, e cioè permettere al computer (l'hardware) di eseguire le istruzioni codificate in un programma (software) inseribile e modificabile dall'esterno …

Risolvere un problema

- Uno dei principali risultati della teoria della computabilità è la completa identità delle classi di problemi risolubili nei diversi formalismi
  - Ci sono problemi che non possono avere risposta ☹
  - Ci sono problemi che possono essere risolti ☺
  - Ci sono problemi che richiedono risorse così ingenti da scoraggiare ogni tentativo di soluzione pratica ☺ ☹
- Molte proprietà relative, ad esempio, alle macchine di Turing si estendono immediatamente ad un qualsiasi linguaggio di programmazione