Fondamenti d'Informatica: Linguaggio While

Barbara Re, Phd

Il linguaggio WHILE

- La computabilità come supporto ai moderni linguaggi di programmazione
- Si può generalizzare rispetto ad una vasta famiglia di linguaggi come ALGOL, PASCAL, C, C++, Java
- Di riferimento un semplice linguaggio di programmazione imperativo chiamato **WHILE**
  - E' adeguato per rappresentare tutte le **funzioni calcolabili**
  - **Tutte le variabili, così come i parametri di input ed output dei programmi sono interi non negativi**
    - Per non perdere di generalità qualunque parametro o variabile di un qualunque programma è sempre rappresentabile come una sequenza di bit in memoria e prendendo la rappresentazione numerica di questa sequenza di bit otteniamo un numero intero positivo

Sintassi e Semantica

- Un linguaggio di programmazione è un linguaggio formale dotato di una sintassi e una semantica ben definita
- La **sintassi** è un insieme di regole che definiscono la "forma" di un linguaggio; esse definiscono come ottenere delle frasi sequenzializzando una serie di componenti fondamentali, dette parole
  - Applicando le regole della sintassi è possibile stabilire se una frase è corretta oppure no
- La semantica definisce il significato dei programmi sintatticamente corretti nel linguaggio di programmazione in questione

Sintassi del linguaggio WHILE

Specifichiamo la sintassi del WHILE utilizzando le regole di produzione di una grammatica libera dal contesto

PROGRAM → begin end | begin SEQCOMMANDS end

SEQCOMMANDS → COMMAND | SEQCOMMANDS ; COMMAND

COMMAND → ASSIGNEMENT | while TEST do COMMAND | PROGRAM

ASSIGNEMENT → VAR:=0 | VAR:= s(VAR) | VAR :=pd (VAR)

TEST → VAR ≠ VAR

VAR → LETTERA | VAR LETTERA | VAR CIFRA

LETTERA → a| b | …| z

CIFRE → 0| 1| … | 9

Esempio di utilizzo della sintassi

```
begin
        ac:=0;
        while  f≠h do
                begin
                        hf := s(t9)
                end
end
```

PROGRAM ->

begin SEQCOMMANDS end ->

begin SEQCOMMANDS ; COMMAND end ->

begin COMMAND ; COMMAND end ->

begin ASSIGNEMENT ; while TEST do COMMAND end ->

begin VAR:=0; while VAR ≠ VAR do PROGRAM end ->

begin VAR LETTERA :=0; while LETTERA ≠ LETTERA do begin SEQCOMMANDS end end ->

begin LETTERAc:=0; while f≠h do begin COMMAND end end ->

begin ac:=0; while f≠h do begin ASSIGNEMENT end end ->

begin ac:=0; while f≠h do begin VAR:= s(VAR) end end ->

begin ac:=0; while f≠h do begin VAR LETTERA := s(VAR CIFRA) end end ->

begin ac:=0; while f≠h do begin LETTERA LETTERA := s(LETTERA CIFRA) end end ->

begin ac:=0; while f≠h do begin LETTERA LETTERA := s(LETTERA CIFRA) end end ->

begin ac:=0; while f≠h do begin hf := s(t9) end end

QUESTO CODICE HA VERAMENTE SENSO?

Comandi

- Un programma WHILE è una sequenza, ordinata finita, eventualmente vuota) di comandi, separati da punti e virgole, preceduta da begin e seguita da end

I comandi sono definiti induttivamente

- Comandi di Assegnamento
- Comandi Composti
- Comandi While

Comandi di Assegnamento

- Zero, s e pd costituiscono gli **operatori base del linguaggio**
- Nei programmi WHILE i valori assegnati alle variabili saranno sempre numeri naturali

- (Zero): X:=0

- (s): X:=s(Y)
  - E' la funzione di successore (s(n) = n + 1 per ogni naturale n)

- (pd): X:=pd(Y)
  - E' la funzione di predecessore (pd(n) = n – 1 se n>0 e pd(0)=0)

Comandi Composti

- Si tratta di istruzioni della forma

$$\text{begin } C_1; \ldots ; C_N \text{ end}$$

- Con N naturale e indica le istruzioni $C_1, \ldots, C_N$ devono essere eseguite in successione secondo l'ordine assegnato
- Ammettiamo anche il caso N = 0 che si riduce sostanzialmente ad un'istruzione che lascia inalterato il valore di tutte le variabili

Comandi While

While X ≠ Y do Command

La semantica consiste nel ripetere l'esecuzione del comando descritto in Command per tutto il tempo in cui la variabile X assume un valore diverso dal valore della variabile Y

L'unico operatore di confronto tra variabili nel linguaggio While è almeno inizialmente ≠

Macro Istruzioni

- Il potere espressivo dei programmi WHILE non è inferiore a quello di altri usuali linguaggi di programmazione almeno per quanto concerne l'aspetto computazionale
- E' quindi importante definire varie macro-istruzioni che possono agevolare la stesura di un programma qualora coerentemente con la sintassi non ci siano comandi primitivi utili
  - Assegnare il valore di una variabile Y ad un'altra variabile X
  - Assegnare il valoare di una costante n > 0 ad una variabile U, U:=n
  - …

Macro - assegnazione

- Assegnare il valore di una variabile Y ad un'altra variabile X

```
begin
        X:= s(Y) ;
        X := pd (X)
end
```

X := Y

- Assegnare il valore di una costante n>0 a una variabile U di fatto il comando U=s(U) deve essere ripetuto n volte

```
begin
        U:=0;
        U:=s(U) ;
        … ;
        U:=s(U)
end
```

U := n

Macro - Somma

- Sommare il valore della variabile Y alla variabile X

```
Begin
    U:=0 ;
   while U ≠ Y do
      begin
            X:= s(X) ;
            U:=s(U)
      end
end
```

X:=X+Y

Macro – Sommare due Variabili

- Sommare il valore della variabile Y e della variabile X assegnandolo alla variabile Z (se usiamo le macro già definite)

```
Begin
   Z:= Y;
   Z:= Z+X;
end
```

```
Z:=X+Y
```

Moltiplicare il valore della variabile X per la variabile Y, X:=X*Y

X:=X*Y

```
begin
    u:=0;
    z:=0;
    y:=pd(y);
        while u ≠ x do
        begin
            u:=s(u);
        end
        while z ≠  y do
        begin
            h:=0;
            z:=s(z);
            while h ≠ u do
            begin
                x:=s(x) ;
                h:=s(h);
            end
        end
end
```

Differenza Aritmetica

- Sottrarre il valore della variabile Y alla variabile X

```
begin
    U:=0;
    while U ≠ Y do
        begin
                X:= pd(X);
                U:=s(U)
        end
end
```

X:=X-Y

Possiamo considerare l'operazione di *differenza aritmetica* indicata col simbolo #, tra due numeri interi positivi *X* ed *Y*.

Avremo che **X #Y = X -Y** se *X* è maggiore od uguale ad *Y*

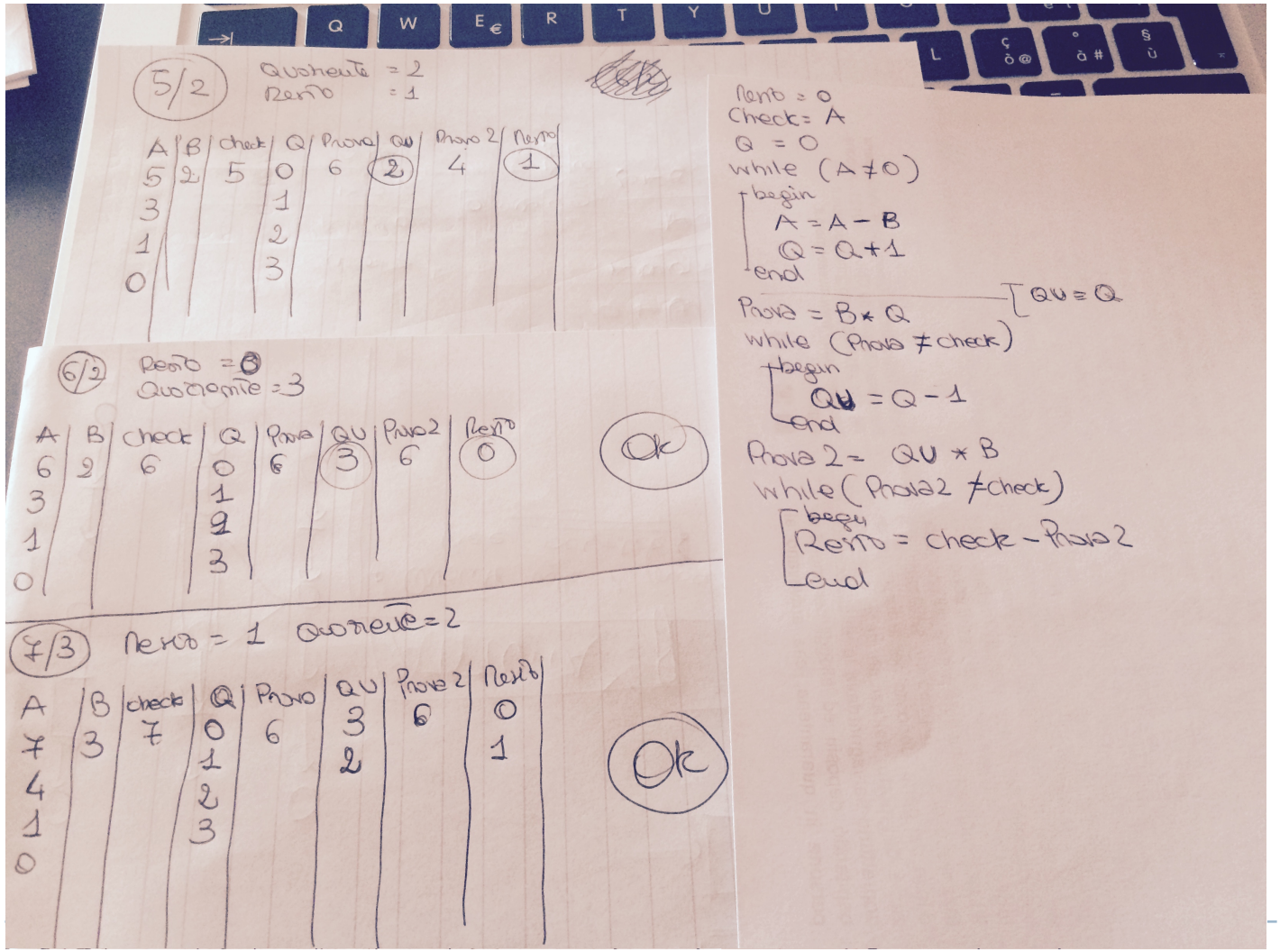
In caso contrario, ovvero quando *Y* è maggiore di *X* allora *X #Y = 0*, ovvero poniamo il risultato della differenza propria uguale a zero. In questo modo **l'operazione è ben definita per ogni coppia di numeri interi positivi**

Dividere il valore della variabile X per la variabile Y, X:=X/Y

Macro: Quoziente e Resto della divisione tra A e B

```
Begin
resto:= 0;
Check:=A;
Q:=0;
While (A ≠ 0)
        begin
                A:= A – B;
                Q:= Q+1;
        end
Quoziente:=Q;
Prova = B * Quoziente;
While (Prova ≠ Check)
        begin
                Quoziente = Q – 1;
                Prova = Check;
        end
Prova2 := B * Quoziente
While (Prova2 ≠ Check)
        begin
                Resto = Check – Prova2;
                Prova2 = Check;
        end
End
```

Macro: Quoziente e Resto



Operatori di confronto

- L'unico operatore di confronto disponibile è il ≠ ma è spesso necessario considerare anche altri tipi di test

- Come possiamo rendere il minore e il maggiore?

Operatori di confronto

- L'unico operatore di confronto disponibile è il ≠ ma è spesso necessario considerare anche altri tipi di test
- Come possiamo rendere il **minore, il maggiore, l'uguale**?
- Possiamo quindi costruire espressioni booleane "E" concatenando **and (^)**, **not (¬)** e **or (v)**?
- L'intuizione è associare a ciascuna espressione una condizione di test che ha come unici valori ammissibile 0 e 1, che fanno riferimento rispettivamente al falso e al vero

Minore

$$X < Y$$

$$(Y - X) - pd(Y - X)$$

$X < Y$ è vera se e soltato se $(Y - X) - pd(Y - X) = 1$

$X < Y$ è falsa se e soltato se $(Y - X) - pd(Y - X) = 0$

Espressioni

- Attraverso le macro possiamo quindi costruire gli usuali connettivi della logica elementare not, and e or

- $T_{\neg E} = 1 - T_E$ (dunque 1 se $T_E = 0$ e viceversa)

- $T_{E \wedge E'} = pd\ (T_E + T_{E'})$ (dunque 1 se $T_E = T_{E'}$, 0 altrimenti)

- $T_{E \vee E'} = T_E + T_{E'} - pd\ (T_E + T_{E'})$ (dunque 1 se $T_E = 1$ o $T_{E'} = 1$, 0 altrimenti)

Si può provare anche la moltiplicazione per ottenere espresisoni più semplici per ^ e v

Estensione comando While

while EXPRBOOL do COMMAND

```
begin
        U:=T EXPRBOOL
        V:=0
        while U ≠ V do begin COMMAND; U:=T EXPRBOOL end
end
```

EXPRBOOL -- Generica Espressione Booleana

T EXPRBOOL -- Condizione di Test associata all'espressione booleana

If … then … else

if EXPRBOOL then $COMMAND_1$ else $COMMAND_2$

```
begin
        U:=T EXPRBOOL

        V:=0

        while (U = 1) ∧ (V =0) do begin COMMAND1; V:=1 end

        while (U = 0) ∧ (V =0) do begin COMMAND2; V:=1 end
end
```

Concludendo!

- Per quanto riguarda la sintassi con tutte queste macro l'espressività del WHILE è sostanziale all'espressività del PASCAL

La semantica del linguaggio WHILE

- Consideriamo programmi WHILE *P* a *k* variabili, cioè programmi abilitati a utilizzare *k* variabili X I , . . . , X k , o eventualmente un loro sottoinsieme
- Conveniamo poi che le variabili XI, .. ; , Xk siano ordinate in base ai loro indici i $\in$ {I, ... , *k*}
- Chiamiamo *stato di computazione* di *P* una qualunque k-upla $a = (a_I, \ldots, a_k)$ di naturali: si intende allora che in *P* XI assume il valore a_I, ..., X_k assume il valore a_k.
- Uno stato di computazione è anche detto *vettore di stato*

Computazione

- Consideriamo di rappresentare la *computazione* di un programma WHILE *P* a *k* variabili
- Useremo le lettere C, C e così via per denotare termini della categoria sintattica COMMAND (cioè singoli comandi per *P)* e C, *C'*, ... per indicare termini della categoria sintattica SEQCOMMAND (cioè sequenze di comandi per *P)*
- Si ricordi che *P* stesso può essere visto come una sequenza di comandi

Configurazione

- Una coppia ordinata *(C, a)* dove C è una sequenza di comandi di *P* e *a* è un vettore di stato di *P* è chiamata *configurazione* di *P*
- La sequenza C descrive, intuitivamente, quali comandi sono da svolgere a un certo punto della sua esecuzione mentre il vettore di stato *a* precisa il valore delle variabili a cui C si applica
- La *relazione di transizione* → tra queste coppie *(C, a)* (sequenza di comandi, vettore di stato) mostra come vengono eseguiti i singoli comandi di un programma e come vengono modificate le variabili del programma stesso
- La terminazione di una sequenza di comandi viene denotata con end

Semantica Operazionale – part I

$$SC_{zero}\ \frac{a = (a_1,\ldots,a_k)\ \text{e}\ \ a' = (a_1, \ldots, a_{u-1}, 0, a_{u+1}, \ldots, a_k)}{(\text{Xu} := 0, a) \rightarrow (\text{end}, a')}$$

$$SC_{S}\ \frac{a = (a_1,\ldots,a_k)\ \text{e}\ \ a' = (a_1, \ldots, a_{u-1}, s(a_v), a_{u+1}, \ldots, a_k)}{(\text{Xu} := s\ (\text{Xv}), a) \rightarrow (\text{end}, a')}$$

$$SC_{pd}\ \frac{a = (a_1,\ldots,a_k)\ \text{e}\ \ a' = (a_1, \ldots, a_{u-1}, pd(a_v), a_{u+1}, \ldots, a_k)}{(\text{Xu} := pd\ (\text{Xv}), a) \rightarrow (\text{end}, a')}$$

Le regole descrivono come vengono modificati i valori del vettore di stato quando un comando di assegnamento viene eseguito

Semantica Operazionale – part II

Le regole gestiscono i comandi di interazione while

$$SC_{while1}\ \frac{a = (a_1,\ldots,a_k) \text{ e } a_u \neq a_v}{(\text{ while Xu } \neq \text{ Xv do C, a}) \rightarrow (\text{ C; while Xu } \neq \text{ Xv do C, a})}$$

Mostra come permettere l'esecuzione del corpo del while nel caso in cui il test è soddisfatto

$$SC_{while1}\ \frac{a = (a_1,\ldots,a_k) \text{ e } a_u = a_v}{(\text{while Xu } \neq \text{ Xv do C, a}) \rightarrow (\text{ } end, \text{ a})}$$

Mostra come permettere l'esecuzione del corpo del while nel caso in cui il test non è soddisfatto

Semantica Operazionale – part III

$$SC_{program1}\ \frac{}{(\text{begin end}, a) \rightarrow (\ end, a)}$$

$$SC_{program2}\ \frac{}{(\text{begin C end}, a) \rightarrow (\ C, a)}$$

Le regole gestiscono i comandi composti, e quindi si procede alla valutazione del loro corpo

Semantica Operazionale – part IV

$$SC_{seq1}\ \frac{(C_1, a) \rightarrow (C'_1, a') \text{ e } C'_1 \neq end}{(C_1 ; C_2, a) \rightarrow (C'_1 ; C_2, a')}$$

$$SC_{seq2}\ \frac{(C_1, a) \rightarrow (end, a')}{(C_1 ; C_2, a) \rightarrow (C_2, a')}$$

Trattano sequenze di comandi e in particolar modo implementano la sequenzializzazione dei comandi specificati

Computazione di un programma WHILE

Siano:

- P un programma WHILE a K variabili
- $a(0) = (a_1, \ldots, a_k)$ un vettore di stato

Una computazione di P è una sequenza, possibilmente infinita, della forma

$\langle P, a(0)\rangle \rightarrow \langle C_1, a(1)\rangle \rightarrow \langle C_2, a(2)\rangle \rightarrow \langle C_3, a(3)\rangle \rightarrow \ldots$

Dove per ogni $i \geq 1$ a(i) è un vettore stato a k dimensioni e C_i una sequenza di comandi (che corrisponde alla situazione del programma P al passo i-esimo della computazione)

Se la sequenza di computazione è finita allora ha la forma

$\langle P, a(0)\rangle \rightarrow \langle C_1, a(1)\rangle \rightarrow \langle C_2, a(2)\rangle \rightarrow \langle C_3, a(3)\rangle \rightarrow \ldots \rightarrow \langle end, a(n)\rangle$

La proposizione che segue è diretta conseguenza delle regole operazionali della relazione di transizione → definita per tramite delle regole.

Un programma divergente o convergente

Siano:

- P un programma WHILE a K variabili
- $a = (a_1, \ldots, a_k)$ un vettore di stato

Allora esiste esattamente una computazione da P che ammette *a* come vettore di stato iniziale

In questo caso *a* prende il nome **di vettore di input** e si conviene quanto segue:

- Se la computazione P su a è **infinita**, si dice che P **diverge** sull'input a e che il suo output è indefinito
- Se invece la computazione è **finita** e della forma

$$\langle P, a(0)\rangle \rightarrow \langle C_1, a(1)\rangle \rightarrow \langle C_2, a(2)\rangle \rightarrow \langle C_3, a(3)\rangle \rightarrow \ldots \rightarrow \langle end, a(n)\rangle$$

(Ovviamente con a = a(0)), si dice che P **converge o termina** sull'input a e che il suo output è a(n).

Funzione WHILE calcolabile

- Considerato che la computazione di un programma WHILE P su un dato input è unica possiamo parlare di **funzione calcolata** da P
- Sia dunque P un programma a K variabili X1, … Xk per qualche K ≥ 1; si dice **funzione calcolata da P** la funzione parziale f_P da N^k a N tale che, per ogni a $\in N^k$,
  - f_P (a) è il valore di X1 nell'output della computazione di P su a se questa computazione ha fine
  - f_P (a) non è definita altrimenti

- **DEFINIZIONE:** Una funzione parziale f_P da N^k a N si dice WHILE-calcolabile se f_P è la funzione calcolata da qualche programma WHILE P

Programmi e MdT

- **DEFINIZIONE:** Una funzione parziale f_P da N^k a N si dice WHILE-calcolabile se e solo se è calcolabile (secondo Turing)