



Fondamenti d'Informatica: lavoriamo con le grammatiche

Barbara Re, Phd



Esercizio – Grammatica e generazione stringhe

Data una Grammatica ed una Stringa, verificare che la Stringa sia generata dalla Grammatica:

$$V_T = \{a, b, c\} \quad V_N = \{S, A\}$$

S = assioma

Produzioni:

- ▶ $S \rightarrow A$
- ▶ $S \rightarrow cSc$
- ▶ $A \rightarrow aa \mid bb$

Stringa:

(1) $s = cccbbcccc$

(2) $s = ccaabbcc$



Esercizio – Grammatica e generazione stringhe

Data una Grammatica ed una Stringa, verificare che la Stringa sia generata dalla Grammatica:

$$V_T = \{a, b, c\} \quad V_N = \{S, A, B\}$$

S = assioma

Produzioni:

- ▶ $S \rightarrow Sa \mid cAb$
- ▶ $A \rightarrow aA \mid bBc$
- ▶ $B \rightarrow cSb \mid b$

Stringa:

(I) $s = caabbcbaa$



Esercizio – Grammatica e generazione stringhe

Data una Grammatica ed una Stringa, verificare che la Stringa sia generata dalla Grammatica:

$$V_T = \{a, b, c\} \quad V_N = \{S, C\}$$

S = assioma

Produzioni:

- ▶ $S \rightarrow aS \mid CbC$
- ▶ $C \rightarrow cC \mid c \mid S$

Stringa:

(I) $s = aaaccbaaccc$



Esercizio – Grammatica e generazione stringhe

Data una Grammatica ed una Stringa, verificare che la Stringa sia generata dalla Grammatica:

$$V_T = \{a, b\} \quad V_N = \{V, D\}$$

S = assioma

Produzioni:

- ▶ $S \rightarrow V \mid D$
- ▶ $V \rightarrow aaV \mid b$
- ▶ $D \rightarrow b \mid aDb$

Stringa:

- (1) $s = aaaab$
- (2) $s = aaabbb$
- (3) $s = abb$



Esercizio – Grammatica e generazione stringhe

Data una Grammatica ed una Stringa, verificare che la Stringa sia generata dalla Grammatica:

$$V_T = \{a, b\} \quad V_N = \{S, A, B\}$$

S = assioma

Produzioni:

- ▶ $S \rightarrow B \mid a$
- ▶ $B \rightarrow bA \mid aA$
- ▶ $A \rightarrow aB \mid b$

Stringa:

- (1) $s = aababb$
- (2) $s = bb$
- (3) $s = aabababb$



Esercizio – Grammatica e generazione stringhe

Data una Grammatica ed una Stringa, verificare che la Stringa sia generata dalla Grammatica:

$$V_T = \{a, b\} \quad V_N = \{S, A, B\}$$

S = assioma

Produzioni:

- ▶ $S \rightarrow B \mid a$
- ▶ $B \rightarrow bA \mid aA$
- ▶ $A \rightarrow aB \mid b$

Stringa:

- (1) $s = aababb$
- (2) $s = bb$
- (3) $s = aabababb$



Esercizio – Grammatica e generazione stringhe

Data una Grammatica ed una Stringa, verificare che la Stringa sia generata dalla Grammatica:

$$V_T = \{a, b, c\} \quad V_N = \{S, A, B\}$$

S = assioma

Produzioni:

- ▶ $S \rightarrow A \mid aA$
- ▶ $A \rightarrow aAb \mid b \mid AB$
- ▶ $B \rightarrow b \mid ABa \mid c$

Stringa:

(1) $s = aabbcbb$

(2) $s = aabbb$

(3) $s = aabbbca$

Esercizio – Grammatica e generazione stringhe

- Data la seguente grammatica e le stringhe, verificare se le stringhe sono ammissibili rispetto alla grammatica data

START \rightarrow "inizio" START "fine" | CORPO
CORPO \rightarrow PARTE1 PARTE2
PARTE1 \rightarrow "atomo1" PARTE1 | λ
PARTE2 \rightarrow "atomo2" | "atomo2" PARTE2

s = "inizio" "inizio" "atomo1" "atomo1" "atomo2" "atomo2" "fine" "fine"

s = "inizio" "atomo1" "atomo2" "atomo2" "fine" "fine"

s = "inizio" "atomo1" "atomo2" "atomo1" "fine"

Esercizio – Tipo Grammatica, generazione Stringhe e Linguaggio

Si consideri la seguente
grammatica G

$$V_T = \{a, b\} \quad V_N = \{S, A\}$$

S = assioma

Produzioni:

- ▶ $S \rightarrow a$
- ▶ $S \rightarrow aA$
- ▶ $A \rightarrow a$
- ▶ $A \rightarrow aA$
- ▶ $A \rightarrow b$
- ▶ $A \rightarrow bA$

- ▶ Svolgere ciascuno dei
seguenti punti
 - ▶ Di che tipo è la
grammatica?
 - ▶ Mostrare una derivazione
per “abba” e una per
“baab”.
 - ▶ Qual è il linguaggio
generato da G ?

Esercizio – Tipo Grammatica, generazione Stringhe e Linguaggio

Si consideri la seguente
grammatica G

$$V_T = \{a\} \quad V_N = \{S, A\}$$

S = assioma

Produzioni:

- ▶ $S \rightarrow AA$
- ▶ $A \rightarrow AAA$
- ▶ $A \rightarrow a$

- ▶ Svolgere ciascuno dei seguenti punti:
 - ▶ Di che tipo è la grammatica?
 - ▶ Mostrare una derivazione per “aaaaa” e una per “aaaa”?
 - ▶ Qual è il linguaggio generato da G ?
 - ▶ Esiste una grammatica di altro tipo che genera lo stesso linguaggio?

Esercizio – Tipo Grammatica, generazione Stringhe e Linguaggio

Si consideri la seguente
grammatica G

$$V_T = \{a, b\} \quad V_N = \{S, A\}$$

S = assioma

Produzioni:

- ▶ $S \rightarrow AA$
- ▶ $A \rightarrow AAA \mid a \mid bA \mid Ab$

- ▶ Svolgere ciascuno dei
seguenti punti:
 - ▶ Di che tipo è la
grammatica?
 - ▶ Mostrare una derivazione
per “babbab”?
 - ▶ Qual è il linguaggio
generato da G ?

Esercizio – Tipo Grammatica, generazione Stringhe e Linguaggio

Si consideri la seguente
grammatica G

$$V_T = \{a, b, c, d\} \quad V_N = \{S, A\}$$

S = assioma

Produzioni:

- ▶ $S \rightarrow cAd$
- ▶ $A \rightarrow bAb \mid a$

- ▶ Svolgere ciascuno dei
seguenti punti:
 - ▶ Di che tipo è la
grammatica?
 - ▶ Mostrare una derivazione
per “cbabb” e una per
cbbbabbdbd
 - ▶ Qual è il linguaggio
generato da G ?

Esercizio – Tipo Grammatica, generazione Stringhe e Linguaggio

Si consideri la seguente
grammatica G

$$V_T = \{x\} \quad V_N = \{S, X, B\}$$

S = assioma

Produzioni:

- ▶ $S \rightarrow xX$
- ▶ $X \rightarrow x$
- ▶ $X \rightarrow xB$
- ▶ $B \rightarrow xX$

- ▶ Svolgere ciascuno dei seguenti punti:
 - ▶ Di che tipo è la grammatica?
 - ▶ Mostrare una derivazione per “xxxxx” e “xxxx”
 - ▶ Qual è il linguaggio generato da G ?
 - ▶ Esiste una grammatica context free che lo genera? Se sì, dare la sua definizione.

Esercizio – Tipo Grammatica, generazione Stringhe e Linguaggio

Si consideri la seguente
grammatica G

$$V_T = \{a, b\} \quad V_N = \{S, A\},$$

S = assioma

Produzioni:

- ▶ $S \rightarrow a \mid aA$
- ▶ $A \rightarrow a \mid b \mid aA \mid bA$

- ▶ Svolgere ciascuno dei
seguenti punti
 - ▶ Di che tipo è la
grammatica?
 - ▶ Mostrare una derivazione
per “baab” e “abba”
 - ▶ Qual è il linguaggio
generato da G ?

Esercizio – Tipo Grammatica, generazione Stringhe e Linguaggio

Si consideri la seguente
grammatica G

$$V_T = \{a, b, c\} \quad V_N = \{A, X, S\},$$

S = assioma

Produzioni:

- ▶ $S \rightarrow X \mid \lambda$

- ▶ $A \rightarrow aXa \mid bXb \mid c$

- ▶ Svolgere ciascuno dei
seguenti punti

- ▶ Di che tipo è la
grammatica?

- ▶ Mostrare una derivazione
per “abcba”

- ▶ Qual è il linguaggio
generato da G ?

Esercizio – Tipo Grammatica, generazione Stringhe e Linguaggio

Si consideri la seguente
grammatica G

$$V_T = \{a, b\} \quad V_N = \{S, A, B\},$$

S = assioma

Produzioni:

- ▶ $S \rightarrow A \mid B$
- ▶ $A \rightarrow a \mid aA \mid bA$
- ▶ $B \rightarrow b \mid aB \mid bB$

- ▶ Svolgere ciascuno dei
seguenti punti
 - ▶ Di che tipo è la
grammatica?
 - ▶ Mostrare una derivazione
per “baab” e “abba”
 - ▶ Qual è il linguaggio
generato da G ?

Esercizio – Tipo Grammatica, generazione Stringhe e Linguaggio

Si consideri la seguente
grammatica G

$$V_T = \{a, b\} \quad V_N = \{S, T, A, B\},$$

S = assioma

Produzioni:

- ▶ $S \rightarrow AT$
- ▶ $T \rightarrow AT \mid ABT \mid \lambda$
- ▶ $AB \rightarrow BA$
- ▶ $BA \rightarrow AB$
- ▶ $A \rightarrow a$
- ▶ $B \rightarrow b$

- ▶ Svolgere ciascuno dei
seguenti punti
 - ▶ Di che tipo è la
grammatica?
 - ▶ Verificare che G generi
tutte e sole le stringhe su
 $\{a, b\}$ tali che il numero di 'a'
è maggiore del numero di
'b'

Esercizio – Linguaggi

Definiti i linguaggi:

- ▶ $L_1 = \{aa, ab, bc, c\}$
- ▶ $L_2 = \{1, 22, 31\}$

Descrivere i linguaggi:

- ▶ L_1^*
- ▶ $L_1 L_2$
- ▶ $L_1 L_2^*$
- ▶ $L_1 \cup L_2$

Esercizio – Individuazione Linguaggio

Si consideri la seguente grammatica G

$$V^T = \{a,b,c\} \quad V^N = \{S,A\} \quad S \text{ assioma}$$

Produzioni:

$$\triangleright S \rightarrow aSc \mid A$$

$$\triangleright A \rightarrow bAc \mid \lambda$$

Qual è il linguaggio generato da G?

Definire le regole di produzione senza ricorsione su S

Esercizio – Individuazione Linguaggio

Si consideri la seguente grammatica G

$$V^T = \{a,b,c\} \quad V^N = \{S,B,C\} \quad S \text{ assioma}$$

Produzioni:

- ▶ $S \rightarrow aS \mid B$
- ▶ $B \rightarrow bB \mid bC$
- ▶ $C \rightarrow cC \mid c$

Qual è il linguaggio generato da G ?

Esercizio – Individuazione Linguaggio

Si consideri la seguente grammatica G

$$V^T = \{a, b, c\} \quad V^N = \{S, B\} \quad S \text{ assioma}$$

Produzioni:

$$\triangleright S \rightarrow aSc \mid B$$

$$\triangleright B \rightarrow bB \mid b$$

Qual è il linguaggio generato da G ?

Esercizio – Individuazione Linguaggio

Si consideri la seguente grammatica G

$V^T = \{a, b\}$ $V^N = \{S\}$ S assioma

Produzioni:

► $S \rightarrow aSb \mid ab$

Qual è il linguaggio generato da G ?

Esercizio – Individuazione Linguaggio

Si consideri la seguente grammatica G

$$V^T = \{a,b\} \quad V^N = \{S,A\} \quad S \text{ assioma}$$

Produzioni:

- ▶ $S \rightarrow aAb$
- ▶ $aA \rightarrow aaAb$
- ▶ $A \rightarrow \lambda$

Qual è il linguaggio generato da G ?

Esercizio – Individuazione Linguaggio

Si consideri la seguente grammatica G

$V^T = \{a,b\}$ $V^N = \{S,A\}$ S assioma

Produzioni:

- ▶ $S \rightarrow AS \mid A$
- ▶ $A \rightarrow aAb \mid ab$

Qual è il linguaggio generato da G?

Esercizio – Individuazione Linguaggio

Si consideri la seguente grammatica G

$V^T = \{a,b\}$ $V^N = \{S,A\}$ S assioma

Produzioni:

▶ $S \rightarrow Ab$

▶ $A \rightarrow Sa$

Qual è il linguaggio generato da G?

Esercizio – Individuazione Linguaggio

Si consideri la seguente grammatica G

$$V^T = \{a,b,c\} \quad V^N = \{S,A\} \quad S \text{ assioma}$$

Produzioni:

- ▶ $S \rightarrow aSc \mid A$
- ▶ $A \rightarrow bAc \mid \lambda$

Qual è il linguaggio generato da G ?

Esercizio – Individuazione Grammatica

Dato il linguaggio

$$L = \{a^n bcd^n \mid n \geq 0\}$$

costruire una
grammatica che lo
genera.

E' possibile utilizzare
una grammatica
regolare?

Se si, dare la sua
definizione.

Esercizio – Individuazione Grammatica

Dato il linguaggio

$$L = \{a^n bcd^m \mid n \geq 0, m \geq 0\}$$

costruire una grammatica
che lo genera

E' possibile utilizzare
una grammatica
regolare?

Se si, dare la sua
definizione.

Esercizio – Individuazione Grammatica

Dato il linguaggio

$$L = \{ab^n cd^n \mid n \geq 0\}$$

costruire una
grammatica che lo
genera

E' possibile utilizzare
una grammatica
regolare?

Se si, dare la sua
definizione.

Esercizio – Individuazione Grammatica

- ▶ Dato il linguaggio $L = \{a^n b^{2n} \mid n > 0\}$ costruire una grammatica che lo genera

Esercizio – Individuazione Grammatica

- ▶ Definire una grammatica che generi il linguaggio

$$L(G) = \{a^n b \mid n > 0\}$$

Esercizio – Individuazione Grammatica

- ▶ Definire una grammatica che generi il linguaggio

$$L(G) = \{a^n b^n \mid n > 0\}$$

Esercizio – Classificare le seguenti grammatiche

1. $S \rightarrow 0AB1$
 $A \rightarrow 0A \mid 0$
 $B \rightarrow B1 \mid 1$

2. $S \rightarrow 1A \mid 0B$
 $A \rightarrow S0 \mid S0S \mid 0S \mid 0$
 $B \rightarrow S1 \mid S1S \mid 1S \mid 1$

3. $S \rightarrow (A + A) \mid (A - A)$
 $A \rightarrow (A + A) \mid (A - A) \mid I$
 $I \rightarrow 0J \mid 1J \mid \dots \mid 9J$
 $J \rightarrow I \mid 0 \mid 1 \mid \dots \mid 9$

4. $S \rightarrow abc \mid aSBc$
 $cB \rightarrow Bc$
 $bB \rightarrow bb$

5. $S \rightarrow ABS \mid \lambda$
 $BA \rightarrow AB$
 $BS \rightarrow b$
 $Bb \rightarrow bb$
 $Ab \rightarrow ab$
 $Aa \rightarrow aa$

6. $S \rightarrow aS \mid bC \mid b$
 $C \rightarrow cC \mid c$

7. $S \rightarrow aA \mid a$
 $A \rightarrow Sb$

Esercizio – Classificare Linguaggi

- ▶ Classificare i seguenti linguaggi fornendo una grammatica del tipo appropriato

8. $\{a^n b^m c^n \mid n, m > 0\}$

9. $\{a^n b(a|b)^m \mid n, m \geq 0\}$

10. $\{a^n b^n c^m d^m e^p f^p \mid n, m \geq 0, p > 0\}$

11. $\{a^n b^m c^p d^{n+m} \mid n, m, p > 0\}$

12. $\{a^n b^p c^{n+m} d^q e^m \mid n, q \geq 0, m, p > 0\}$

13. $\{(ab)^n bca^m \mid n \geq 0, m > 0\}$

Esercizio – Grammatiche ed espressioni regolari

- ▶ Sia L il linguaggio descritto dall'espressione regolare $(a+b)^*b$:
 1. mostrare una grammatica (di qualsiasi tipo) che generi L
 2. Esiste una grammatica regolare che genera L ?



Esercizio – Grammatiche ed espressioni regolari

- ▶ Mostrare una grammatica che genera l'insieme di tutte le espressioni regolari su $\{a,b\}$

Esercizio – Grammatiche ed espressioni regolari

- Qual è il linguaggio generato dalla seguente grammatica? Quali sono i significati dei vari non terminali?

$$V_T = \{a, b, \emptyset, +, \cdot, *, (,)\}, V_N = \{S, E, T, F, A\}, S = \text{assioma}$$

Produzioni:

$$S \rightarrow E$$

$$E \rightarrow \emptyset \mid T \mid T + T$$

$$T \rightarrow F \mid F \cdot F$$

$$F \rightarrow (E) \mid A \mid F^*$$

$$A \rightarrow a \mid b$$



Esercizio – Grammatiche ed espressioni regolari

- ▶ Mostrare una grammatica che genera l'insieme di tutte le espressioni regolari su $\{a,b\}$