



Fondamenti d'Informatica: Le Macchine di Turing

Barbara Re, Phd



Agenda

- ▶ **Introdurremo ...**
 - ▶ ... il formalismo delle Macchine di Turing nelle varie versioni
 - ▶ ... la nozione di calcolabilità e di decidibilità

La Macchina di Turing (MdT)

- ▶ E' un modello di calcolo introdotto dall'ing. Alan Turing nel 1936, per **simulare il processo di calcolo umano**
- ▶ Rappresenta il primo tentativo di **definizione di procedura effettiva e di programma** eseguito in automatico da una macchina



Alan Turing, 1912-1954



Si prende a esplicito modello **l'impiegato diligente** che svolge con ordine e cura gli incarichi assegnatigli ma non fa nulla di più!

Analisi dei processi di calcolo

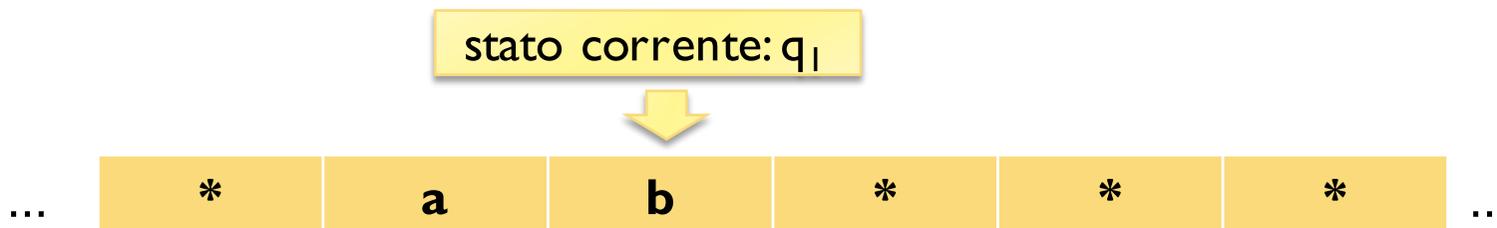
- ▶ Studio dei vincoli ai quali sottostà un generico agente razionale **C** impiegato in un processo di calcolo
 - ▶ C dispone di una memoria e di capacità percettive limitate
 - ▶ C dispone, inoltre, di un supporto (un nastro di dimensioni potenzialmente infinite) su cui scrivere e leggere
- ▶ Quali operazioni può svolgere **C**?
 - ▶ C può **scrivere** sul nastro dei simboli tratti da un alfabeto finito
 - ▶ C può **osservare** delle caselle sul nastro (è ragionevole assumere che, a causa delle limitate capacità percettive e di memoria esiste un **limite** al numero di caselle osservabili simultaneamente)
 - ▶ C è in grado di **ricordare risultati determinati da passi precedenti** della computazione e di **utilizzare** tale informazione nel seguito

Verso le MdT

- ▶ Queste condizioni vengono incorporate nella MdT
- ▶ La MdT è quindi una macchina che, se concordiamo con quanto detto sino ad ora, **riproduce gli aspetti essenziali dei processi di calcolo**

Elementi della MdT

- ▶ Un nastro di lunghezza infinita suddiviso in celle
 - ▶ Ogni cella contiene un simbolo dell'alfabeto oppure un simbolo bianco *
 - ▶ Il nastro contiene un numero finito di simboli tutto il resto del nastro contiene simboli bianchi
 - ▶ Una testina di **lettura e scrittura** che si muove lungo il nastro in entrambe le direzioni possibili
 - ▶ La testina ad ogni istante può indicare una sola cella del nastro
 - ▶ Una unità di controllo a stati finiti, cioè controllata da una macchina a stati
 - ▶ Contiene il programma secondo cui viene eseguito il calcolo e mantiene lo stato della macchina
- Una Memoria
- Una CPU



Elementi della MdT

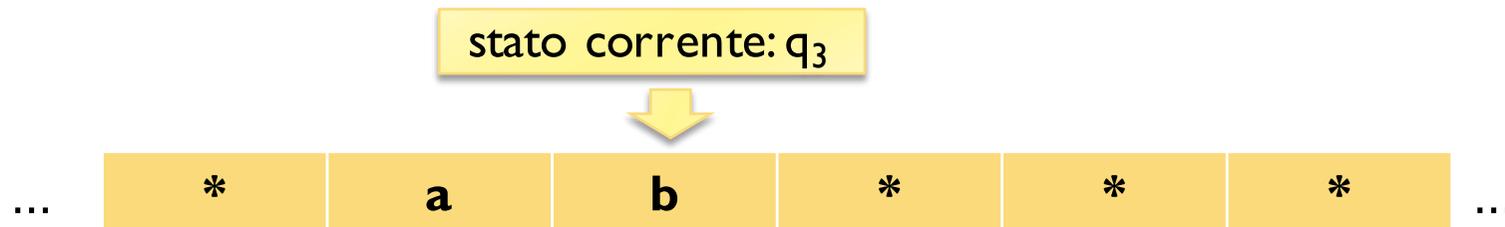
- ▶ **All'inizio del processo di elaborazione** sul nastro si trova la sequenza dei simboli di input e, **al termine si trova l'output del procedimento eseguito**
- ▶ La computazione della MdT avviene per passi discreti a partire da **uno stato iniziale prefissato q_0**
- ▶ Il meccanismo di controllo può essere identificato come un **automa**, perché è in grado di assumere uno tra un numero finito di stati e di svolgere una delle seguenti operazioni elementari
- ▶ Ad ogni passo l'unità di controllo prende atto dello stato in cui si trova e del simbolo contenuto nella cella e:
 - ▶ Rivede il suo stato comandando la sostituzione dello stato attuale con quello successivo
 - ▶ Scrive un simbolo nella cella indicata dalla testina, sostituendo il simbolo esistente (compreso *)
 - ▶ Sposta la testina di una posizione a sinistra o destra oppure arresta il movimento

In sostanza, durante il suo funzionamento **la macchina evolve da una configurazione all'altra** in corrispondenza

- Del simbolo letto sul nastro
- Dello stato in cui si trova

Allora: viene determinato il simbolo che viene scritto sul nastro, lo stato successivo della macchina e il movimento della testina

Esempio di istruzione di una MdT



- ▶ Se ti trovi nello stato q_3 e leggi il simbolo b sul nastro, allora rimpiazza b con a , cambia il tuo stato in q_2 , e spostati a destra



Programma di una MdT

- ▶ Un programma di una MdT può essere pensato come un insieme di quintuple

$$(q, a, q', a', x)$$

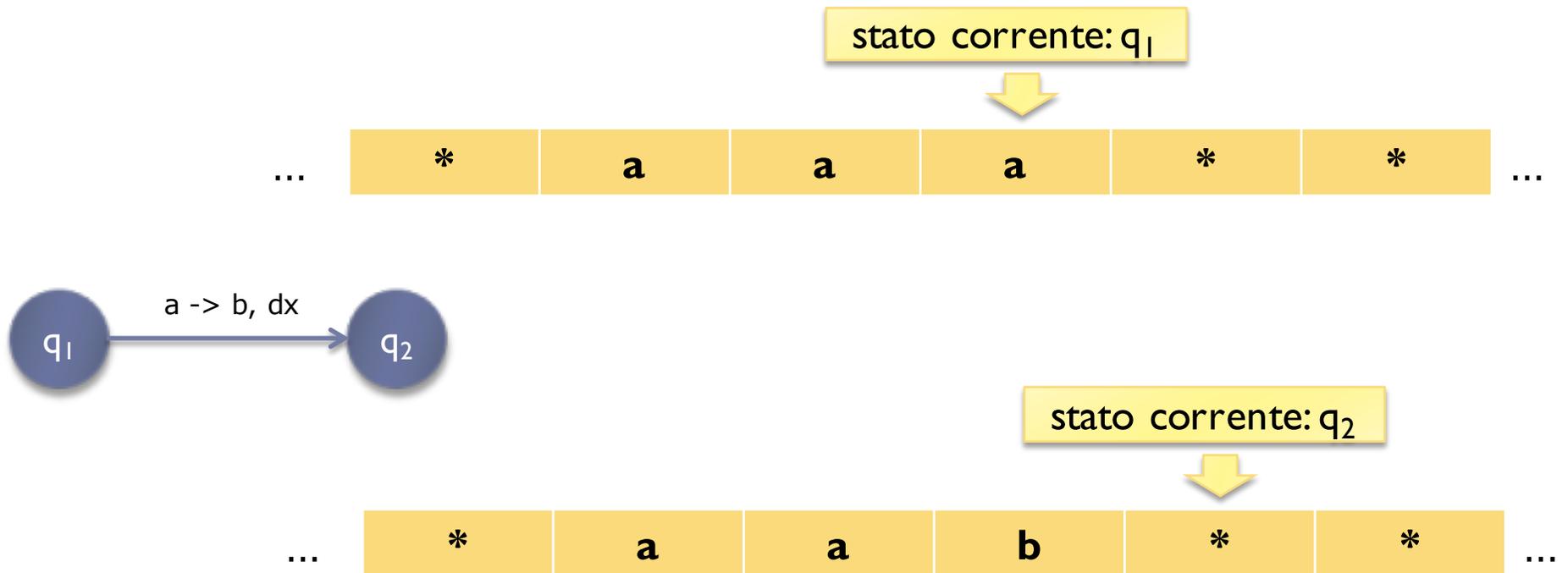
- ▶ q stato dell'unità di controllo
- ▶ a il simbolo della cella indicata dalla testina
- ▶ q' il nuovo stato dell'unità di controllo
- ▶ a' il simbolo da scrivere nella cella esaminata dalla testina
- ▶ x che può assumere il valore "dx", "sx" o "i" fa riferimento allo spostamento della testina (dx – destra, sx – sinistra e i - immobile)

$$(q, a) \longrightarrow (q', a', x)$$

Si può ammettere che le istruzioni manchino ma non che si moltiplichino, la corrispondenza deve essere **deterministica** e lontana da ogni ambiguità

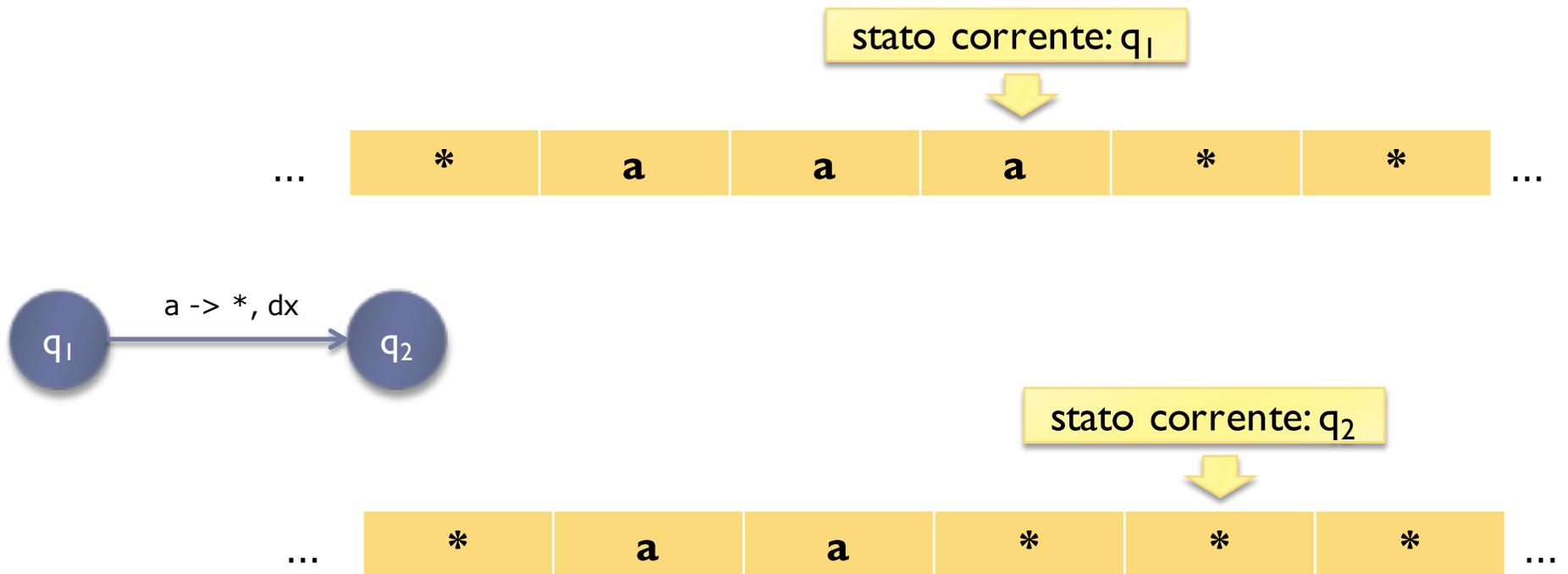
Esempio 1

- ▶ $\delta(q_1, a) = (q_2, b, dx)$
- ▶ Se ti trovi nello stato q_1 e leggi il simbolo a sul nastro, assumi lo stato q_2 , rimpiazza a con b , e spostati a destra

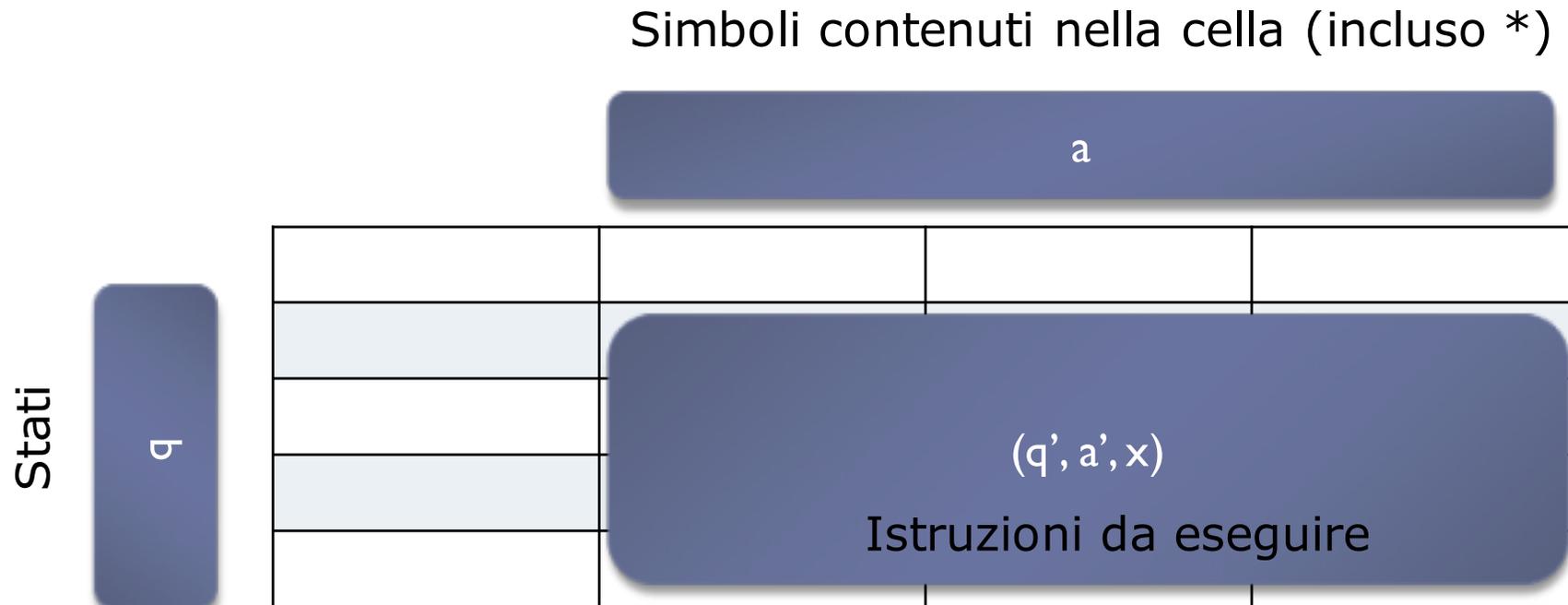


Esempio 2

- ▶ $\delta(q_1, a) = (q_2, *, dx)$
- ▶ Se ti trovi nello stato q_1 e leggi il simbolo a sul nastro, assumi lo stato q_2 , rimpiazza a con $*$, e spostati a destra



Matrice Funzionale

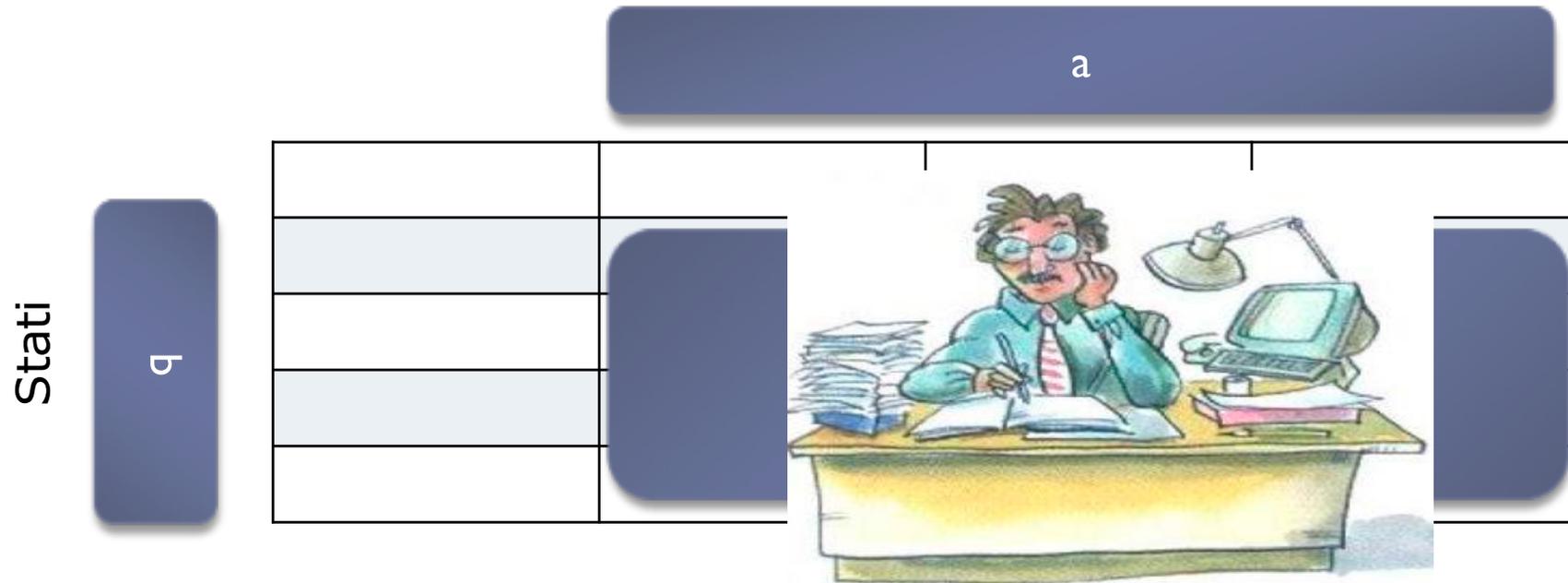


Nel caso una casella della matrice funzionale è **vuota** significa che la macchina non ha azioni da compiere e quindi termina il calcolo

Una MdT così come definita è detta **deterministica** a sottolineare che ogni tripla (q', a', x) , se esiste, è unica e univocamente determinata dalla coppia (q, a)

Matrice Funzionale

Simboli contenuti nella cella (incluso *)



SONO QUESTE LE AZIONI CHE IL NOSTRO **IMPIEGATO DILIGENTE** COMPIE QUOTIDIANAMENTE

MdT è definita da una quintupla

- ▶ Una macchina di Turing M deterministica è una quintupla

$$(Q, A, \delta, q_0, q_F)$$

- ▶ Q è l'insieme finito e non vuoto di stati della macchina
- ▶ A è un alfabeto, cui si aggiunge il carattere speciale detto **blank** (rappresentato da un asterisco) che rappresenta la situazione di cella non contenente alcun carattere
- ▶ $q_0 \in Q$ è lo stato iniziale
- ▶ $q_F \in Q$ è lo stato finale (possono essere definiti anche più di uno stato finale)
- ▶ δ è una **funzione di transizione** che fa evolvere la computazione della macchina da

$$\delta = (Q - q_F) \times (A \cup \{*\}) \rightarrow Q \times (A \cup \{*\}) \times \{dx, sx, i\}$$

Gli elementi (q, a, q', a', x) sono chiamati **regole di transizione** o **istruzioni di M**

Trasduttori e Riconoscitori

- ▶ Le macchine di Turing possono essere utilizzate:
 - ▶ Per riconoscere o accettare stringhe su un alfabeto, in questo caso vengono dette **riconoscitrici**
 - ▶ Per calcolare funzioni, in questo caso vengono dette **trasduttori**

Si noti che, le macchine di Turing riconoscitrici calcolano **la funzione caratteristica** dell'insieme delle stringhe che appartengono al linguaggio che si vuole riconoscere

funzione: $\Sigma^* \rightarrow \{0, 1\}$

Vale 1 se per ogni stringa del linguaggio, vale 0 altrimenti

Configurazione di una MdT

Definizione: Si definisce **configurazione** di una macchina di Turing una stringa

$$s \in A^* \circ Q \circ A^*$$

del tipo

$$s = a_{i1} \dots a_{in} q_r a_{j1} \dots a_{jm} \quad n \geq 0, m \geq 0$$

ove:

- ▶ A^* è l'insieme di tutte le stringhe appartenenti all'alfabeto, il simbolo \circ è l'operatore di concatenazione sulle stringhe
- ▶ $a_{i1} \dots a_{in} q_r a_{j1} \dots a_{jm}$ rappresenta la porzione di nastro contenente caratteri diversi da $*$, mentre il resto del nastro contiene solo il carattere $*$
- ▶ a_{j1} è il contenuto della cella puntata dalla testina
- ▶ q_r è lo stato in cui si trova la macchina
- ▶ Configurazioni particolari sono quella **iniziale** e quella **finale**

Configurazione Iniziale e Finale di una MdT

Definizione: Una configurazione $s = xqy$ è detta **iniziale** se

$$x = \lambda; \quad q = q_0; \quad y \in A^+$$

- ▶ Cioè una configurazione iniziale è una situazione in cui lo stato della macchina è q_0 e la testina si trovi posizionata sul primo carattere a sinistra della stringa di input (non vuota)

Definizione Una configurazione $s = xqy$ è detta **finale** se

$$x \in A \quad q = q_F; \quad y \in A^*$$

- ▶ Cioè una configurazione finale è una situazione in cui lo stato della macchina è q_F indipendentemente dal contenuto del nastro e dalla posizione della testina

Funzione di Transizione di una MdT

- ▶ Data una configurazione c_i una singola applicazione della funzione δ a c_i permette di ottenere una nuova configurazione c_j secondo le seguenti regole:

- ▶ $\delta(q_r; a_{j1}) = (q_k; a_h; dx)$ significa compiere la seguente transizione di configurazione:

$$a_{i1} \dots a_{in} q_r a_{j1} \dots a_{jm} \rightarrow a_{i1} \dots a_{in} a_h q_k a_{j2} \dots a_{jm}$$

- ▶ $\delta(q_r; a_{j1}) = (q_k; a_h; sx)$ significa compiere la seguente transizione di configurazione:

$$a_{i1} \dots a_{in} q_r a_{j1} \dots a_{jm} \rightarrow a_{i1} \dots a_{in-1} q_k a_{in} a_h a_{j2} \dots a_{jm}$$

- ▶ $\delta(q_r; a_{j1}) = (q_k; a_h; i)$ significa compiere la seguente transizione di configurazione:

$$a_{i1} \dots a_{in} q_r a_{j1} \dots a_{jm} \rightarrow a_{i1} \dots a_{in} q_k a_h a_{j2} \dots a_{jm}$$

Computazioni di una MdT

Definizione: Una successione di configurazione c_1, \dots, c_n eventualmente **infinita**, tale che c_1 è uno stato iniziale e $\forall i, c_i \rightarrow c_{i+1}$ definisce una computazione per la macchina di Turing.

- ▶ Usiamo la scrittura $c_i \rightarrow^* c_j$ per denotare l'esistenza di una computazione che da c_i porta a c_j tramite un numero finito, eventualmente 0, di transizioni.
- ▶ Ogni computazione può avere al più una configurazione iniziale, e una computazione infinita non ha configurazioni finali.

Definizione Una computazione finita c_1, \dots, c_n è detta **massimale** se non esiste una configurazione c tale che $c_n \rightarrow^* c$. Ovvero, una computazione **massimale** si conclude o con una configurazione finale o con una configurazione in cui non è definita la funzione di transizione δ .

Definizione Una **computazione massimale** c_1, \dots, c_n è detta **accettante** se c_n è uno stato finale (i.e. una configurazione dove lo stato è finale).

Definizione Una **computazione massimale** c_1, \dots, c_n è detta **rifiutante** se c_n è uno stato NON finale.

Linguaggio Riconosciuto da una MdT

Una MT può essere utilizzata per **riconoscere** o **decidere** un linguaggio $L \subseteq A^*$

Definizione Data una MdT $M=(Q, A, \delta, q_0, q_F)$ diciamo che M **riconosce** o **decide** un linguaggio $L \subseteq A^*$ **se e solo se** per ogni stringa $x \in A^*$, stringa dell'alfabeto, esiste una **computazione massimale accettante** o **rifiutante** per la macchina M :

$$\forall x \in A^*, q_0x \xrightarrow{*} wqz, q = q_F \Leftrightarrow x \in L$$

Cioè una MdT riconosce un linguaggio L se per ogni stringa definita sull'alfabeto A e in grado di stabilire se la stringa x appartiene o no al linguaggio L

Definizione Un linguaggio **riconosciuto** da una MdT è detto **T-decidibile**

Linguaggio Accettato da una MdT

Definizione: Data una MdT $M=(Q, A, \delta, q_0, q_F)$ diciamo che M accetta un linguaggio $L \subseteq A^*$ se e solo se per ogni stringa $x \in A^*$ L esiste una **computazione massimale accettante** per la macchina M , cioè

$$L = \{x \in A^* | q_0 x \xrightarrow{*} w q_F z\}$$

- ▶ Una MdT accetta un linguaggio L se per tutte le stringhe del linguaggio e in grado di stabilire tale appartenenza, cioè esiste una computazione massimale accettante. Non è in grado di dire nulla per tutte le stringhe non appartenenti al linguaggio.

Definizione: Un linguaggio **accettato** da una MdT è detto **T-semidecidibile**

Un linguaggio è T-decidibile e anche T-semidecidibile, ma il viceversa non è vero.

Macchine di Turing Trasduttori

Data una mdT $M=(Q, A, \delta, q_0, q_F)$ ed una funzione $f:A^* \rightarrow A^*$, diremo che M calcola la funzione f se e solo se

$$\forall x \in A^*, f(x) \downarrow, f(x)=y \Rightarrow q_0x \xrightarrow{*} x \{*\} q_F y$$

Se $x \notin A^*$, o $f(x) \uparrow$ allora o la macchina termina in uno stato non finale o non termina.

In generale:

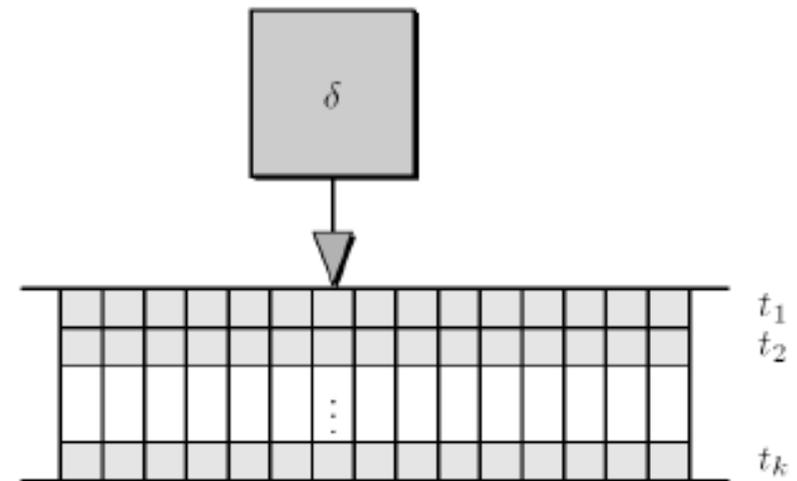
- ▶ Per funzioni arbitrarie $f : D \rightarrow C$ ci si può ricondurre a MdT operanti su stringhe
- ▶ Per funzioni a più argomenti per esempio $f : D_1 \times D_2 \rightarrow C$ si può pensare di codificare opportunamente le coppie $d_1; d_2$ con simboli da usare sul nastro

Tipi di Macchine di Turing

- ▶ Esistono vari tipi di Macchine di Turing
 - ▶ singolo nastro mono traccia **deterministiche**
 - ▶ singolo nastro multi traccia **deterministiche**
 - ▶ multi nastro mono/multi traccia **deterministiche**
 - ▶ singolo/multi nastro mono/multi traccia **NON deterministiche**

Macchine di Turing Multi-traccia

- ▶ Una macchina di Turing multi-traccia consiste di un nastro suddiviso in tracce disposte in modo tale che la testina, con una singola operazione può accedere a tutte le celle di tutte le tracce in corrispondenza della testina
- ▶ Possiamo considerare la macchina multi-traccia come una macchina che anziché operare su simboli scalari opera su simboli vettoriali
- ▶ Quindi, una macchina di Turing multitraccia è in grado di scrivere e leggere caratteri vettoriali ma la testina si sposta contemporaneamente su tutte le tracce
- ▶ Da un punto di vista fisico si può immaginare di avere una macchina composta da un nastro suddiviso in m tracce ed una singola testina



MdT deterministica multi-traccia

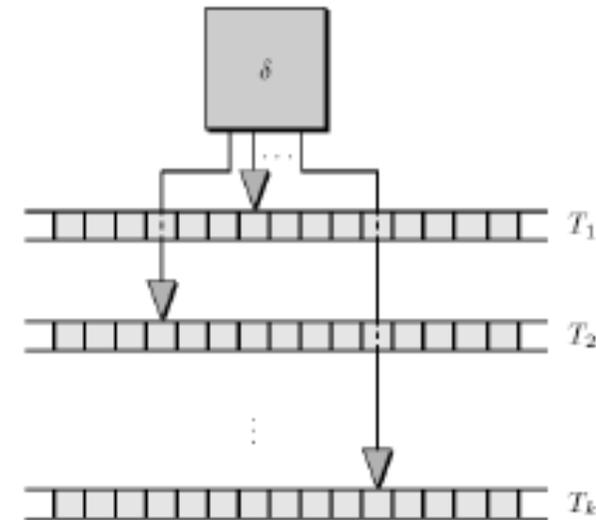
- ▶ Una macchina di Turing M deterministica multi-traccia con m tracce è una quadrupla

$$(Q, A, \delta, q_0, q_F)$$

- ▶ Q è l'insieme finito e non vuoto di stati della macchina
- ▶ $A = A_1 \times \dots \times A_m$ è un alfabeto, cui si aggiunge il simbolo bianco
- ▶ δ è una **funzione di transizione** che fa evolvere la computazione della macchina
da $Q \times (A^m \cup \{*\})$ a $Q \times (A^m \cup \{*\}) \times \{-1, +1\}$
 - ▶ Gli elementi (q, a, q', a', x) sono chiamati regole di transizione o istruzioni di M
- ▶ $q_0 \in Q$ è lo stato iniziale

MdT deterministica multi-nastro

- ▶ Da un punto di vista fisico si può immaginare una macchina composta da m nastri e m testine, una per ogni nastro
- ▶ La MdT in base allo stato interno ed ai caratteri letti dalle testine decide in quale stato transire, quali caratteri scrivere sul nastro e come spostare le testine.



MdT deterministica multi-nastro

- ▶ Una macchina di Turing M deterministica multi-nastro con m nastri è una quadrupla

$$(Q, A, \delta, q_0, q_F)$$

- ▶ Q è l'insieme finito e non vuoto di stati della macchina
- ▶ $A = A_1 \times \dots \times A_m$ è un alfabeto, cui si aggiunge il simbolo bianco
- ▶ δ è una **funzione di transizione** che fa evolvere la computazione della macchina da Q
 $\times (A^m \cup \{*\}) \times Q \times (A^m \cup \{*\}) \times \{-1, +1\}^m$
 - ▶ Gli elementi (q, a, q', a', x) sono chiamati regole di transizione o istruzioni di M
- ▶ $q_0 \in Q$ è lo stato iniziale
- ▶ $q_F \in Q$ è lo stato finale (possono essere definiti anche più di uno stato finale)

Espressività

- ▶ L'uso di MT multi-traccia permette di avere un maggior potere computazionale ?
- ▶ L'uso di MT multi-nastro permette di avere un maggior potere computazionale ?

Espressività

- ▶ L'uso di MT multi-traccia permette di avere un maggior potere computazionale ?
- ▶ **Teorema** - Una Macchine di Turing singolo nastro multi-traccia M con m tracce puo essere simulata da una macchina di Turing singolo nastro mono-traccia N .
- ▶ L'uso di MT multi-nastro permette di avere un maggior potere computazionale ?
- ▶ **Teorema** - Sia data una macchina di Turing multi-nastro M con k nastri, allora esiste una macchina di Turing N a singolo nastro che la simula.

Macchine di Turing Deterministiche

- ▶ Tutti i modelli di calcolo sinora esaminati sono tutti deterministici, cioè la transizione da un passo della computazione al successivo è sempre univocamente determinata.
- ▶ Il determinismo è un concetto molto vicino al modo di funzionamento dei calcolatori i quali ad ogni istante determinano lo stato successivo della computazione in base alla semantica della istruzione da eseguire.
- ▶ Si possono definire modelli di calcolo in cui si rilascia l'univocità della funzione di transizione della computazione da un stato al successivo.

MdT non deterministica

- ▶ Una macchina di Turing M non deterministica è una quadrupla

$$(Q, A, \delta, q_0, q_F)$$

- ▶ Q è l'insieme finito e non vuoto di stati della macchina
- ▶ A è un alfabeto, cui si aggiunge il simbolo bianco
- ▶ δ è una **funzione di transizione** che fa evolvere la computazione della macchina
da $Q \times (A \cup \{*\})$ a $P(Q \times (A \cup \{*\}) \times \{-1, +1\})$
- ▶ $q_0 \in Q$ è lo stato iniziale
- ▶ $q_F \in Q$ è lo stato finale (possono essere definiti anche più di uno stato finale)

MdT non deterministica

- ▶ La configurazione successiva **non e univocamente determinata** e la computazione non e piu una successione di configurazioni ma secondo un albero di conigurazioni
- ▶ Il grado di non determinismo corrisponde, dato una generica configurazione, al massimo numero di configurazioni generate dalla funzione δ .
- ▶ Una MT non deterministica si comporta come se ad ogni passo istanziasse nuove MT, ognuna delle quali elabora una delle configurazione diverse prodotte dalla funzione di transizione δ .
- ▶ **Teorema** - Per ogni MTND M esiste una MT deterministica $M^{(3)}$ deterministica a 3 nastri equivalente.

Uno dei tanti!

<http://kangourou.di.unimi.it/2012/turing/myturing.html>

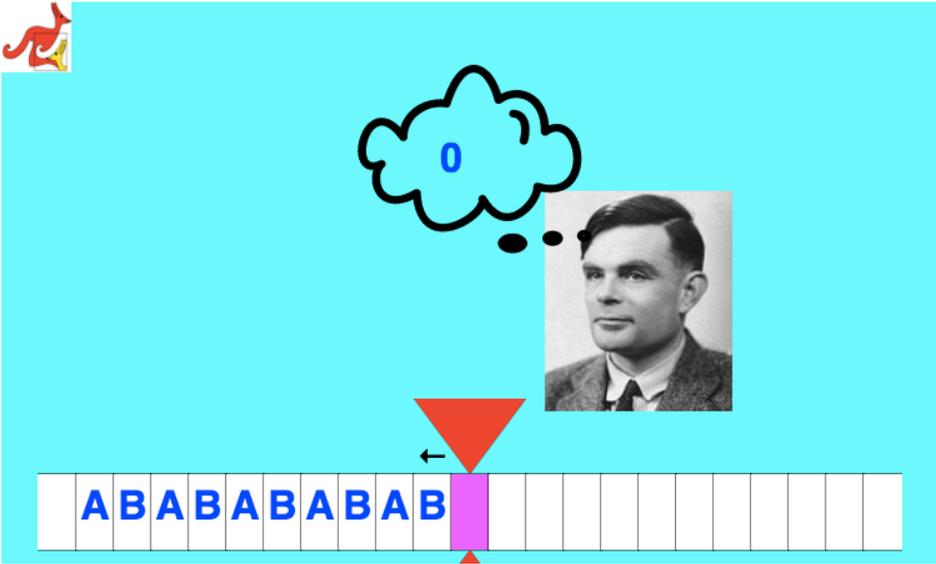
La macchina di Alan Turing

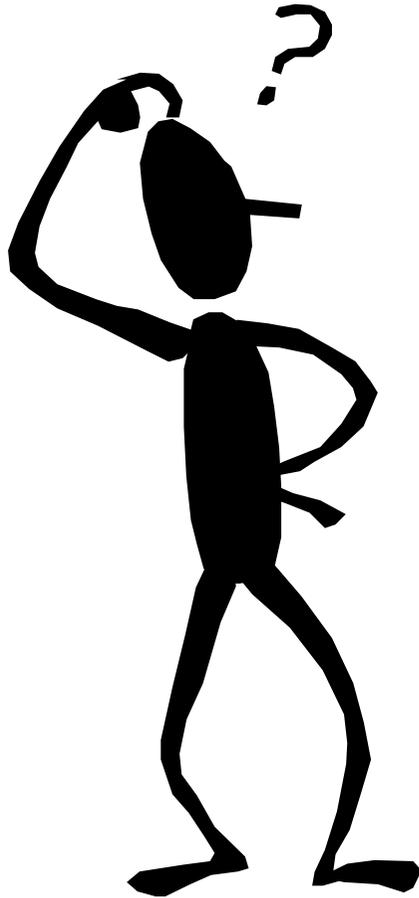
Aziona Esegui passo-passo
Ferma Ricomincia

Nastro iniziale:

Programma:
(0,A) > (1,A,s)
(1,A) > (0,B,s)

Carica un esempio:





Questions?