LOGICA MATEMATICA

Sonia L'Innocente

Corso di Laurea

Informatica e Tecnologie/Informatica Industriale

Argomento Aggiuntivo:DNF-CNF

Logica proposizionale

`a.a. 2017-2018`

Outline

Definizione.

Una formula α si dice

1. *basica* se e solo se α è una variabile proposizionale o la sua negazione;

2. in *forma normale disgiuntiva* se α è una disgiunzione di congiunzioni di formule basiche:

$$\alpha = \bigvee_{i \leq k} \bigwedge_{j \leq n_i} \lambda_{i,j}$$

dove k e ciascun n_i ($i \leq k$) sono interi positivi, mentre ciascun $\lambda_{i,j}$ è una formula basica (si scrive allora $\alpha \in DNF$);

3. in *forma normale congiuntiva* se α è una congiunzione di disgiunzioni di formule basiche:

$$\alpha = \bigwedge_{i \leq k} \bigvee_{j \leq n_i} \lambda_{i,j}$$

dove k e ciascun n_i ($i \leq k$) sono interi positivi, mentre ciascun $\lambda_{i,j}$ è una formula basica (si scrive allora $\alpha \in CNF$).

Proposizione.

Sia β una formula. Allora esistono una formula $\alpha \in DNF$ e una formula $\gamma \in CNF$ logicamente equivalenti a β.

Nella ricerca di nuovi metodi più veloci per il problema della soddisfacibilità, possiamo allora cercare intanto un metodo effettivo per tradurre una arbitraria formula α in una formula in *DNF* o in *CNF* logicamente equivalente ad α. Illustremo tale metodo.

Riduzione in DNF o in CNF.

Sia α una formula. Per ottenere una formula in *DNF* o in *CNF* logicamente equivalente ad α si esegue il seguente programma.

(a) Eliminare $\leftrightarrow$ in α (basta ricordare che, se β e γ sono due formule, allora $\beta \leftrightarrow \gamma$ è logicamente equivalente a $(\beta \rightarrow \gamma) \wedge (\gamma \rightarrow \beta)$).

(b) Eliminare $\rightarrow$ (per ogni scelta di β e γ, $\beta \rightarrow \gamma$ è logicamente equivalente a $\neg\beta \vee \gamma$).

(c) Eliminare ogni connettivo $\neg$ che non riguardi direttamente variabili proposizionali (ricordare che, per ogni scelta di β e γ, sono logicamente equivalenti $\neg\neg\beta$ e β, $\neg(\beta \wedge \gamma)$ e $\neg\beta \vee \neg\gamma$, $\neg(\beta \vee \gamma)$ e $\neg\beta \wedge \neg\gamma$).

Sappiamo che valgono le proprietà distributive tanto di $\wedge$ rispetto a $\vee$ quanto di $\vee$ rispetto a $\wedge$: infatti, per ogni scelta di β, γ e δ in *F*, sono logicamente equivalenti le formule $\beta \wedge (\gamma \vee \delta)$ e $(\beta \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \delta)$, $\beta \vee (\gamma \wedge \delta)$ e $(\beta \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \delta)$).

Così un semplice trucco per ridurre, dopo il passo (c), la formula α in *DNF* è quello di sostituire in α $\vee$ e $\wedge$ rispettivamente con $+$ e $\cdot$, fare i calcoli come se α fosse un polinomio e, dopo aver ridotto il polinomio in forma normale (somma di prodotti di variabili proposizionali), mettere nuovamente $\vee$ e $\wedge$ al posto di $+$ e $\cdot$. Naturalmente, se si preferisce *CNF* a *DNF*, il trucco è lo stesso; basta avere la precauzione di sostituire stavolta $\wedge$ con $+$ e $\vee$ con $\cdot$. Sintetizzando, l'ultimo passo del programma di riduzione a *DNF* o *CNF* è:

(d) usare le proprietà distributive di $\wedge$ ($\vee$) rispetto a $\vee$ ($\wedge$).

Qualche esempio illustrerà meglio il procedimento.

Esempi

1. Sia α la formula

$$((p_0 \leftrightarrow p_1) \to (p_2 \to p_3)) \wedge (p_1 \to \neg(p_0 \wedge p_2)).$$

Usando il precedente programma si ottengono successivamente con i passi (a), (b) e (c):

$$(((p_0 \to p_1) \wedge (p_1 \to p_0)) \to (p_2 \to p_3)) \wedge (p_1 \to \neg(p_0 \wedge p_2)),$$

$$(\neg((\neg p_0 \vee p_1) \wedge (\neg p_1 \vee p_0)) \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg(p_0 \wedge p_2)),$$

$$(\neg(\neg p_0 \vee p_1) \vee \neg(\neg p_1 \vee p_0) \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_0 \vee \neg p_2),$$

$$((p_0 \wedge \neg p_1) \vee (p_1 \wedge \neg p_0) \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_0 \vee \neg p_2).$$

A questo punto, se preferiamo *DNF*, sostituiamo $\vee$ con $+$ e $\wedge$ con $\cdot$. Otteniamo

$$((p_0 \cdot \neg p_1) + (p_1 \cdot \neg p_0) + \neg p_2 + p_3) \cdot (\neg p_1 + \neg p_0 + \neg p_2)$$

da cui, con i calcoli abituali, giungiamo a

$$(p_0 \cdot \neg p_1 \cdot \neg p_1) + (p_1 \cdot \neg p_0 \cdot \neg p_1) + (\neg p_2 \cdot \neg p_1) + (p_3 \cdot \neg p_1) + (p_0 \cdot \neg p_1 \cdot \neg p_0) +$$

$$+(p_1 \neg p_0 \cdot \neg p_0) + (\neg p_2 \cdot \neg p_0) + (p_3 \cdot \neg p_0) + (p_0 \cdot \neg p_1 \cdot \neg p_2) +$$

$$+(p_1 \cdot \neg p_0 \cdot \neg p_2) + (\neg p_2 \cdot \neg p_2) + (p_3 \cdot \neg p_2).$$

Sostituendo nuovamente $+$ con $\vee$ e $\cdot$ con $\wedge$, si arriva a

$$(p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_1) \vee (p_1 \wedge \neg p_0 \wedge \neg p_1) \vee (\neg p_2 \wedge \neg p_1) \vee (p_3 \wedge \neg p_1) \vee (p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_0) \vee$$

$$\vee (p_1 \neg p_0 \wedge \neg p_0) \vee (\neg p_2 \wedge \neg p_0) \vee (p_3 \wedge \neg p_0) \vee (p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee$$

$$\vee(p_1 \wedge \neg p_0 \wedge \neg p_2) \vee (\neg p_2 \wedge \neg p_2) \vee (p_3 \wedge \neg p_2)$$

che è in *DNF* e che si verifica facilmente essere logicamente equivalente a

$$(p_0 \wedge \neg p_1) \vee (\neg p_2 \wedge \neg p_1) \vee (p_3 \wedge \neg p_1) \vee (p_1 \wedge \neg p_0) \vee (\neg p_2 \wedge \neg p_0) \vee (p_3 \wedge \neg p_0) \vee$$

$$\vee(p_0 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee (p_1 \wedge \neg p_0 \wedge \neg p_2) \vee \neg p_2 \vee (p_3 \wedge \neg p_2).$$

Se si preferisce ridurre α in *CNF*, si sostituiscono $\wedge$, $\vee$ rispettivamente con $+$, $\cdot$, e si ottiene, con passaggi del tutto analoghi ai precedenti:

$$(p_0 \vee p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (p_0 \vee \neg p_0 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge$$

$$\wedge(\neg p_1 \vee \neg p_0 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_0 \vee \neg p_2)$$

che è, appunto, in *CNF* e che si prova facilmente essere logicamente equivalente all'altra formula di *CNF*

$$(p_0 \vee p_1 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_0 \vee \neg p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_0 \vee \neg p_2).$$

2.

Sia ora α la formula

$$((p_0 \wedge p_1) \to (p_2 \wedge p_3)) \wedge ((p_4 \wedge p_5) \to p_6) \wedge ((p_6 \wedge p_3) \to p_7) \wedge p_0 \wedge p_1 \wedge p_4 \wedge p_5 \wedge \neg$$

Col programma sopra enunciato si ottengono dapprima:

$$(\neg(p_0 \wedge p_1) \vee (p_2 \wedge p_3)) \wedge (\neg(p_4 \wedge p_5) \vee p_6) \wedge (\neg(p_6 \wedge p_3) \vee p_7) \wedge p_0 \wedge p_1 \wedge p_4 \wedge p_5 \wedge \neg p$$

$$(\neg p_0 \vee \neg p_1 \vee (p_2 \wedge p_3)) \wedge (\neg p_4 \vee \neg p_5 \vee p_6) \wedge (\neg p_6 \vee \neg p_3 \vee p_7) \wedge p_0 \wedge p_1 \wedge p_4 \wedge p_5 \wedge \neg p_7$$

Usando (d) si può trovare una formula di *DNF* che è logicamente equivalente ad α ed è la disgiunzione di 27 congiunzioni di formule basiche. Invece è semplice provare che α è logicamente equivalente alla seguente formula di *CNF*:

$$(\neg p_0 \vee \neg p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_0 \vee \neg p_1 \vee p_3) \wedge (\neg p_4 \vee \neg p_5 \vee p_6) \wedge$$

$$\wedge (\neg p_6 \vee \neg p_3 \vee p_7) \wedge p_0 \wedge p_1 \wedge p_4 \wedge p_5 \wedge \neg p_7.$$

Nei due esempi precedenti, la forma normale congiuntiva si è rivelata preferibile a quella normale disgiuntiva. Questo fatto è chiaramente una coincidenza. Tuttavia vi sono ragioni generali che fanno prediligere la forma normale congiuntiva piuttosto che quella disgiuntiva. Ad esempio si è osservato che, se S è un sottoinsieme finito di F, allora S è soddisfacibile se e solo se $\bigwedge_{\sigma \in S} \sigma$ è soddisfacibile. Ora, se le formule di S sono tutte in CNF, si ha che $\bigwedge_{\sigma \in S} \sigma$ è (banalmente) in CNF, mentre, se le formule di S sono in DNF, occorre qualche calcolo per trasformare $\bigwedge_{\sigma \in S} \sigma$ in una formula logicamente equivalente in DNF.