LOGICA MATEMATICA

Sonia L'Innocente

Corso di Laurea

L31, Informatica e Tecnologie

Capitoli 4-5

a.a. 2016-2017

Outline

Sintassi.

Dato un insieme non vuoto A indicheremo con A^* l'insieme di tutte le **stringhe** finite di elementi di A. Se, per esempio, $A = \{a, b, c\}$ alcuni tra gli elementi di A^* sono

$$a \quad b \quad c \quad aacba \quad bab \quad bb \quad ccbabbc \quad \dots$$

Talvolta per delimitare una stringa useremo le parentesi angolari e scriveremo $\langle aacba \rangle$ invece di $aacba$, ma se non c'è pericolo di confusione tralasceremo le parentesi angolari.

Infine considereremo anche la **stringa vuota** $\langle\rangle$ che non contiene nessun simbolo. Spesso in informatica la stringa vuota la si indica con la lettera greca ε.

Date due stringhe $s, t \in A^*$, la **concatenazione** di s con t è la stringa st ottenuta scrivendo la stringa s seguita dalla stringa t. Per esempio se $A = \{a, b, c\}$ e s e t sono rispettivamente *ccbabbc* e *aacba*, allora

$$st = \langle ccbabbc\rangle\langle aacba\rangle = ccbabbcaacba.$$

Notiamo che $s\langle\rangle = \langle\rangle s = s$, per ogni $s \in A^*$.
La funzione **lunghezza** $\mathrm{lh}\colon A^* \to \mathbb{N}$ associa ad ogni stringa $s \in A^*$ il numero di caratteri che compaiono in s, dove naturalmente poniamo $\mathrm{lh}\langle\rangle = 0$. Quindi se dobbiamo dimostrare un risultato sulle stringhe potremo usare l'induzione strutturale.
Se A è costituito da un unico elemento, diciamo $A = \{a\}$, allora

$$A^* = \{\langle\rangle, a, aa, aaa, aaaa, aaaaa, \dots\}$$

Osserviamo che in questo caso $\mathrm{lh}\colon A^* \to \mathbb{N}$ è biettiva.

Il calcolo proposizionale.

Fissiamo un insieme L non vuoto i cui elementi si dicono **lettere proposizionali**. Le lettere proposizionali sono indicate dalle prime lettere dell'alfabeto $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \ldots$. L'insieme Prop($L$) delle **proposizioni** su L è un sottoinsieme di

$$(L \cup \{(,), \neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \oplus\})^*$$

di tutte le stringhe finite di simboli che sono elementi di L oppure connettivi o parentesi. Prop(L) è definito dalle clausole

Se $\mathrm{A} \in L$ allora $(\mathrm{A}) \in$ Prop(L),

Se $\mathrm{P} \in$ Prop(L) allora $(\neg\mathrm{P}) \in$ Prop(L),

Se $\square$ è un connettivo binario, e se $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in$ Prop(L) allora $(\mathrm{P}\square\mathrm{Q}) \in$ Prop(L).

Le clausole della definizione sono anche regole di costruzione. S'intende che ogni proposizione si ottiene applicando un numero finito di volte le clausole della definizione. Le lettere $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}, \ldots$ variano su elementi di $\mathrm{Prop}(L)$. Le proposizioni della forma (A) si dicono **proposizioni atomiche**.

Definition

Per $n \in \mathbb{N}$ definiamo $\mathrm{Prop}_n(L)$ un sottoinsieme di $(L \cup \{(,), \neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \oplus\})^*$ mediante le clausole

$$\begin{aligned} \mathrm{Prop}_0(L) &= \{(\mathrm{A}) \mid \mathrm{A} \in L\} \\ \mathrm{Prop}_{n+1}(L) &= \{(\mathrm{P} \square \mathrm{Q}) \mid \mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathrm{Prop}_n(L), \square \in \{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow, \oplus\}\} \\ &\quad \cup \{(\neg \mathrm{P}) \mid \mathrm{P} \in \mathrm{Prop}_n(L)\} \cup \mathrm{Prop}_n(L). \end{aligned}$$

Quindi $\mathsf{Prop}_0(L) \subseteq \mathsf{Prop}_1(L) \subseteq \ldots$ e

$$\mathsf{Prop}(L) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathsf{Prop}_n(L)$$

La **lunghezza** di una proposizione P è la lunghezza di P vista come stringa,

$$\mathsf{lh} \colon \mathsf{Prop}(L) \longrightarrow \mathbb{N}$$

mentre l'**altezza** di una proposizione $\mathsf{ht}(\mathrm{P})$ è definita da

$$\mathsf{ht} \colon \mathsf{Prop}(L) \longrightarrow \mathbb{N} \qquad \mathsf{ht}(\mathrm{P}) = \min \{ n \mid \mathrm{P} \in \mathsf{Prop}_n(L) \},$$

Per esempio se $\mathrm{P} = (\mathrm{A})$, allora $\mathsf{lh}(\mathrm{P}) = 3$ e $\mathsf{ht}(\mathrm{P}) = 0$.

La lunghezza e l'altezza di una proposizione si dicono **misure di complessità** e ci permettono di dimostrare fatti sulle proposizioni per induzione strutturale.

Proposizione. Per ogni $\mathrm{P} \in \mathrm{Prop}(L)$

P inizia con una parentesi (, termina con una parentesi),

il numero di parentesi sinistre è uguale al numero di parentesi destre,

$\mathrm{lh}(\mathrm{P})$ è divisibile per 3.

Dimostrazione.

Dimostriamo il risultato per induzione strutturale.
Se $\mathrm{P} \in \mathsf{Prop}_0(L)$, allora $\mathrm{P} = (\mathrm{A})$ per qu
alche $\mathrm{A} \in L$ e il risultato segue immediatamente.
Supponiamo il risultato valga quando $\mathrm{P} \in \mathsf{Prop}_n(L)$ e dimostriamolo per $\mathrm{P} \in \mathsf{Prop}_{n+1}(L)$. Fissiamo dunque una $\mathrm{P} \in \mathsf{Prop}_{n+1}(L)$:

- Se $\mathrm{P} \in \mathsf{Prop}_n(L)$ il risultato segue immediatamente dall'ipotesi induttiva.
- Se $\mathrm{P} = (\mathrm{Q} \square \mathrm{R})$ con $\mathrm{Q}, \mathrm{R} \in \mathsf{Prop}_n(L)$, allora chiaramente P inizia con una parentesi (e termina con una parentesi); per ipotesi induttiva il numero di parentesi sinistre è uguale al numero di parentesi destre tanto per Q quanto per R, quindi il medesimo risultato vale per P; inoltre se $\mathrm{lh}(\mathrm{Q}) = 3n$ e $\mathrm{lh}(R) = 3m$, allora
$\mathrm{lh}(\mathrm{P}) = 1 + 3n + 1 + 3m + 1 = 3(n + m + 1)$.

Dimostrazione.

- Se $\mathrm{P} = (\neg \mathrm{Q})$ con $\mathrm{Q} \in \mathrm{Prop}_n(L)$, allora chiaramente P inizia con una parentesi (e termina con una parentesi); per ipotesi induttiva il numero di parentesi sinistre è uguale al numero di parentesi destre in Q, quindi il medesimo risultato vale per P; inoltre se $\mathrm{lh}(\mathrm{Q}) = 3n$, allora $\mathrm{lh}(\mathrm{P}) = 1 + 1 + 3n + 1 = 3(n + 1)$. $\square$

Esempi.

Siano $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in L$.

1. $\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}$ non è una proposizione, perché ogni proposizione contiene almeno una parentesi.
2. $)\mathrm{A}($ non è una proposizione, come non lo sono A o $)\mathrm{A})$, perché ogni proposizione inizia con una parentesi (e termina con una parentesi).
3. $((\mathrm{A}) \to (\mathrm{B}))$ è una proposizione perché ottenuta dalle (A) e (B) con una applicazione della clausola induttiva relativa a $\to$.
4. $(\neg((\mathrm{A}) \to (\mathrm{B})))$ è una proposizione perché ottenuta da (A) e (B) con una prima applicazione della clausola induttiva relativa a $\to$ e una seconda applicazione della clausola relativa a $\neg$.

5. $((\mathrm{A})$ non è una proposizione perché in ogni proposizione il numero di parentesi sinistre è uguale al numero di parentesi destre.
6. (AB) non è una proposizione perché non è atomica e non contiene nessun connettivo.

Se una proposizione è della forma $(\neg \mathrm{P})$ o della forma $(\mathrm{P} \Box \mathrm{Q})$, $\neg$ e $\Box$ sono rispettivamente il suo connettivo principale, e P e Q le sottoproposizioni immediate.

Analisi sintattica.

Una proposizione è una lista di simboli, ma è anche passibile di una rappresentazione con una diversa struttura. A ogni proposizione è associato un **albero di costruzione**, o di **analisi sintattica**,[1] che è un albero etichettato finito binario.

Albero binario.

Un albero binario è un insieme X parzialmente ordinato, cioè con una relazione $\preceq$ con le seguenti proprietà: $\preceq$ è una relazione riflessiva, transitiva e antisimmetrica. Gli elementi dell'albero si chiamano **nodi**. Se $x \preceq y$, si dice che y è un **successore**, o un **discendente** di x.

[1] In inglese *parsing*.

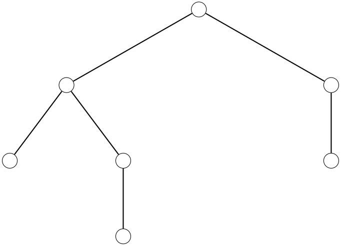
Albero binario.

Esiste un nodo minimo r tale che $r \preceq x$ per ogni nodo di X, e si chiama **radice**. I nodi a tali che non esiste $b \neq a$ per cui $a \preceq b$ si chiamano foglie.[2] Ogni nodo che non sia una foglia ha uno o al massimo due successori immediati,[3] dove si dice che b è un successore immediato di a se $a \preceq b$, $a \neq b$ e non esiste un c tale che $a \preceq c \preceq b$, con $c \neq a$ e $c \neq b$.

[2] Esistono sempre se l'albero, ovvero l'insieme dei nodi X, è finito.

[3] Un'altra terminologia è "figli". Se ci sonodue figli, s'intende che sono esplicitamente distinti il primo e il secondo — sulla pagina, a sinistra e a destra.

La rappresentazione usuale di un albero binario è di questo tipo:



dove la radice è in alto e l'albero cresce verso il basso.

Un **ramo** è un insieme totalmente ordinato[4] di nodi che va dalla radice a una foglia. La sua lunghezza è il numero di nodi che vi appartengono.
L'**altezza** dell'albero è la massima lunghezza dei suoi nodi.
Un albero si dice etichettato se ad ogni nodo è associato un elemento di qualche insieme prefissato, che si chiama etichetta (*label*). Le etichette si possono sovrapporre ed identificare con i nodi.

[4] Per ora basti intendere che due nodi qualunque del ramo sono confrontabili, quindi ogni nodo del ramo salvo l'ultimo ha esattamente un successore immediato, e con ogni nodo nel ramo ci sono tutti i suoi precedenti.

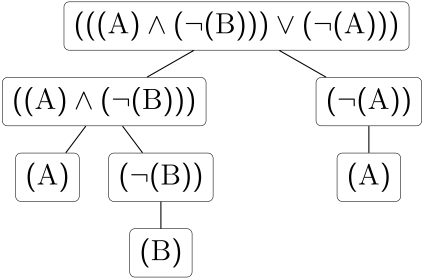
Esempio.

L'albero sintattico di una proposizione è definito in questo modo:

- la radice è (etichettata con) la proposizione data
- ogni nodo ha nessuno, uno o due successori immediati a seconda che la proposizione etichetta del nodo sia atomica, o della forma $(\neg \mathrm{P})$, o della forma $(\mathrm{P} \square \mathrm{Q})$. Nel secondo caso il successore è etichettato con P, nel terzo caso i due successori sono etichettati rispettivamente con P e con Q.

Si chiama **altezza** della proposizione l'altezza del suo albero di costruzione.

L'albero per $(((A) \wedge (\neg(B))) \vee (\neg(B)))$ è il seguente:



La sua altezza è quattro.

Le etichette dei nodi dell'albero di costruzione di una proposizione sono le sue **sottoproposizioni**. Le lettere che compaiono nelle (proposizioni atomiche nelle) foglie sono le lettere che occorrono nella proposizione; si dice che un simbolo occorre in una proposizione se è un elemento della lista (che è la proposizione); le occorrenze di un simbolo in una proposizione sono i vari posti della lista in cui il simbolo si presenta. Se $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$ sono le lettere che occorrono nella proposizione P, si scrive anche $\mathrm{P}[\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n]$. Qualche volta si usa questa notazione anche se $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$ sono solo alcune delle lettere che occorrono in P, o viceversa se le lettere che occorrono in P sono incluse tra le $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$; invece di introdurre notazioni distinte apposite, la differenza sarà chiarita dal contesto o da esplicite precisazioni. Le parentesi sono essenziali per individuare il connettivo principale di una proposizione, e quindi per costruire il suo albero sintattico.

Ma ora per comodità di scrittura e lettura è meglio ridurre il numero di parentesi . Si ordinano per priorità i connettivi secondo le seguente graduatoria:

$$\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \oplus \quad \rightarrow \quad \leftrightarrow .$$

Data quindi una parola le cui parentesi non rispettano le condizioni per essere una proposizione, le parentesi si rimettono secondo questo procedimento: prima si rimettono le parentesi a sinistra e a destra delle lettere; quindi si prende in esame la negazione, se occorre nella parola; si esamina un'occorrenza della negazione che non abbia immediatamente alla sua destra un'altra negazione.

Sia σ la parola alla sua destra che termina con la parentesi destra che chiude la parentesi sinistra. Per trovare la parentesi destra che "chiude" la parentesi sinistra si usa di nuovo il contatore in modo ovvio. Allora si rimette una parentesi sinistra alla sinistra della negazione, se non c'è già, e una parentesi destra a destra di σ, se non c'è già, ottenendo $(\neg\sigma)$; si ripete per ogni occorrenza di $\neg$, quindi si passa ai connettivi binari. Per ciascuno di essi, indicato con $\square$, nell'ordine di priorità, si considerano le più corte sottoparole σ e τ a sinistra e a destra di $\square$ che sono chiuse tra due parentesi sinistre e destre, e si introduce una parentesi (a sinistra di σ e) a destra di τ, se non ci sono già, ottenendo $(\sigma\square\tau)$, e così via.

Per occorrenze multiple dello stesso connettivo si prende in esame l'ultima, quella più a destra; questo significa che per formule composte con uno stesso connettivo ripetuto si conviene l'associazione a destra, cioè ad esempio con $A \to B \to C$ si intende $A \to (B \to C)$, e con $A \wedge B \wedge C$ si intende $A \wedge (B \wedge C)$.

Esempi.

a) Data $A \wedge \neg B \vee \neg A$, la reintroduzione delle parentesi avviene attraverso questa successione di passi:

1. $(A) \wedge \neg(B) \vee \neg(A)$
2. $(A) \wedge \neg(B) \vee (\neg(A))$
3. $(A) \wedge (\neg(B)) \vee (\neg(A))$
4. $((A) \wedge (\neg(B))) \vee (\neg(A))$
5. $(((A) \wedge (\neg(B))) \vee (\neg(A)))$.

I passi 2 e 3 si possono naturalmente fare in parallelo.

Esempi.

b) Data $A \to \neg(B \wedge \neg\neg C)$

1. $(A) \to \neg((B) \wedge \neg\neg(C))$
2. $(A) \to \neg((B) \wedge \neg(\neg(C)))$
3. $(A) \to \neg((B) \wedge (\neg(\neg(C))))$
4. $(A) \to (\neg((B) \wedge (\neg(\neg(C)))))$
5. $((A) \to (\neg((B) \wedge (\neg(\neg(C))))))$

oppure, per rendere più chiara la lettura

1. $A \to \neg(B \wedge \neg(\neg C))$
2. $A \to \neg(B \wedge (\neg(\neg C)))$
3. $A \to (\neg(B \wedge (\neg(\neg C))))$
4. $(A \to (\neg(B \wedge (\neg(\neg C)))))$

rimettendo infine le parentesi intorno alle lettere.

Si noti che se fosse stata data $\mathrm{A} \rightarrow \neg \mathrm{B} \wedge \neg\neg \mathrm{C}$ la reintroduzione delle parentesi avrebbe portato a una diversa proposizione:

$$((\mathrm{A}) \rightarrow ((\neg(\mathrm{B})) \wedge (\neg(\neg(\mathrm{C})))))$$

(esercizio, e si confrontino i due alberi sintattici), per cui le due parentesi lasciate in $\mathrm{A} \rightarrow \neg(\mathrm{B} \wedge \neg\neg \mathrm{C})$ sono essenziali, se si vuole parlare della proposizione $((\mathrm{A}) \rightarrow (\neg((\mathrm{B}) \wedge (\neg(\neg(\mathrm{C}))))))$.

Esempi.

1. Non è comunque necessario né obbligatorio togliere tutte le parentesi; per agevolare la lettura.

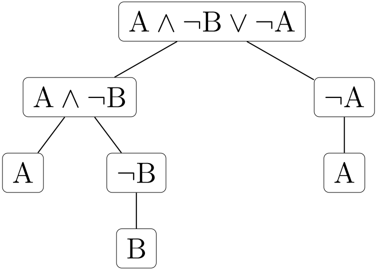
2. Le parentesi si rimettono solo se si ha necessità di capire quale è il connettivo principale, per svolgere l'analisi sintattica.

L'albero sintattico si può costruire direttamente anche per le espressioni prive di tutte le parentesi, se si tiene presente la priorità dei connettivi.

Il connettivo principale è sempre quello di priorità più bassa.

Esempio.

L'albero sintattico per $A \wedge \neg B \vee \neg A$ è il seguente, essendo $\vee$ il connettivo principale:



Semantica.

La semantica ha a che fare con le interpretazioni, grazie alle quali le proposizioni, con la sostituzione di frasi alle lettere, vengono ad assumere un senso e diventano vere o false. Tale attribuzione *finale* di valori di verità è per noi l'operazione di interpretazione, che viene studiata in astratto per vedere se abbia proprietà generali, indipendenti dalle interpretazioni concrete.
I valori di verità saranno rappresentati dall'insieme $\{0, 1\}$. Ci si colloca con tale scelta nell'ottica della logica classica a due valori.
Nell'insieme $\{0, 1\}$ è necessario introdurre un minimo di struttura: la più semplice consiste in convenire che $0 < 1$ e usare la sottrazione come se 0 e 1 fossero numeri interi, con $|x|$ a indicare il valore assoluto.

Interpretazione.

Un'interpretazione è una funzione $i\colon L \longrightarrow \{0,1\}$; una valutazione è una funzione $v : \mathrm{Prop}(L) \to \{0,1\}$ che soddisfa le seguenti condizioni:[5]

$$\begin{aligned} v((\neg \mathrm{P})) &= 1 - v(\mathrm{P}) \\ v((\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q})) &= \min\{v(\mathrm{P}), v(\mathrm{Q})\} \\ v((\mathrm{P} \vee \mathrm{Q})) &= \max\{v(\mathrm{P}), v(\mathrm{Q})\} \\ v((\mathrm{P} \oplus \mathrm{Q})) &= |v(\mathrm{P}) - v(\mathrm{Q})| \\ v((\mathrm{P} \to \mathrm{Q})) &= \max\{1 - v(\mathrm{P}), v(\mathrm{Q})\} \\ v((\mathrm{P} \leftrightarrow \mathrm{Q})) &= 1 - |v(\mathrm{P}) - v(\mathrm{Q})|\,. \end{aligned}$$

[5] Si noti che in $v\left((\neg \mathrm{A})\right)$ e in altre espressioni analoghe ci sono due tipi di parentesi, che andrebbero tipograficamente distinte; quelle interne sono le parentesi della proposizione, quelle esterne servono per la notazione funzionale $v(x)$.

In alternativa, si considerano 0 e 1 come interi modulo[6] 2, $\{0,1\} = \mathbb{Z}_2$, e si scrivono le condizioni:

$$
\begin{aligned}
v((\neg \mathrm{P})) &= 1 + v(\mathrm{P}) \\
v((\mathrm{P} \wedge \mathrm{Q})) &= v(\mathrm{P}) \cdot v(\mathrm{Q}) \\
v((\mathrm{P} \vee \mathrm{Q})) &= v(\mathrm{P}) + v(\mathrm{Q}) + v(\mathrm{P}) \cdot v(\mathrm{Q}) \\
v((\mathrm{P} \oplus \mathrm{Q})) &= v(\mathrm{P}) + v(\mathrm{Q}) \\
v((\mathrm{P} \to \mathrm{Q})) &= 1 + v(\mathrm{P}) \cdot (1 + v(\mathrm{Q})) \\
v((\mathrm{P} \leftrightarrow \mathrm{Q})) &= 1 + (v(\mathrm{P}) + v(\mathrm{Q})).
\end{aligned}
$$

[6] Per chi non sa cosa significa, l'importante è che $1 + 1 = 0$. In pratica i numeri sono divisi in due classi, quella dei pari, rappresentata da 0 e quella dei dispari, rappresentata da 1. La somma di due pari è pari, la somma di due dispari è pari . . . .

Ogni interpretazione i si estende a una valutazione i^* ponendo

$$i^*((\mathrm{A})) = i(\mathrm{A})$$

e definendo i^* sulle proposizioni composte in modo da soddisfare le condizioni della definizione di valutazione.

Validità e conseguenza.

Se $i^*(\mathrm{A}) = 1$, si dice che A è **vera** nell'interpretazione i, o che i *soddisfa* A, o che i è un **modello** di A, e si scrive anche

$$i \models \mathrm{A}.$$

Se esiste almeno una i tale che $i \models \mathrm{A}$, si dice che A è *soddisfacibile*, o (semanticamente) **consistente**. Se non esiste alcun modello di A, si dice che A è **insoddisfacibile**, o (semanticamente) **inconsistente**, o **contradditoria**, o una **contraddizione**. Se per ogni i si ha $i \models \mathrm{A}$, si dice che A è *logicamente valida*, o *logicamente vera*, o una *tautologia*, e si scrive

$$\models \mathrm{A}.$$

Si dice che B è **conseguenza logica** di A, o che A **implica** B, e si scrive

$$\mathrm{A} \models \mathrm{B}$$

se per ogni i, se $i \models \mathrm{A}$ allora $i \models \mathrm{B}$.

Si noti che

Osservazione.

Per ogni A e B,

$$\mathrm{A} \models \mathrm{B} \text{ se e solo se } \models \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}.$$

Siccome $i \models \mathrm{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{A}_n$ se e solo se $i \models \mathrm{A}_j$ per ogni $1 \leq j \leq n$, la definizione di modello si può generalizzare dicendo che i soddisfa un insieme di proposizioni T se e solo se $i \models \mathrm{A}$ per ogni $\mathrm{A} \in T$.

Quindi se A è $\mathrm{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{A}_n$, invece di $\mathrm{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{A}_n \models B$ si scrive $\{\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n\} \models \mathrm{B}$, o anche $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n \models \mathrm{B}$.
Se $\mathrm{A} \models \mathrm{B}$ e $\mathrm{B} \models \mathrm{A}$, si dice che A e B sono **logicamente equivalenti**, o anche solo equivalenti, e si scrive $\mathrm{A} \equiv \mathrm{B}$.

Osservazione.

Per ogni A e B,

$$\mathrm{A} \equiv \mathrm{B} \text{ se e solo se } \models \mathrm{A} \leftrightarrow \mathrm{B}.$$

Si noti che $\models$ e $\equiv$ sono segni metalinguistici, non connettivi.

Dalle definizioni semantiche segue immediatamente che

$$\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n \models \mathrm{B} \text{ se e solo se } \{\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n, \neg \mathrm{B}\} \text{ è insoddisfacibile.}$$

Questo significa che si può assumere come concetto semantico fondamentale sia quello di conseguenza logica sia quello di soddisfacibilità.

La relazione di conseguenza logica è evidentemente transitiva: se $A \models C$ e $C \models B$ allora $A \models B$.

Lo stesso vale per la relazione di equivalenza logica.

Per mezzo di esse, dalle leggi elencate sopra se ne derivano altre; ad esempio dal *modus ponens* e dall'esportazione, con la prima, si ricava

sillogismo disgiuntivo $A \wedge (\neg A \vee B) \to B$

Ma queste leggi soprattutto permettono di vedere che i connettivi $\oplus, \to, \leftrightarrow$ sono definibili in termini di $\neg, \wedge$ e $\vee$.

Linguaggio dei predicati del primo ordine.

Introduciamo tale linguaggio.

Simboli, termini e formule.

Un linguaggio L del prim'ordine consiste dei seguenti oggetti:

- la parentesi aperta (e la parentesi chiusa),
- i simboli $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\exists$, $\forall$ e $=$,
- una lista infinita di simboli detti **variabili**

$$v_0, v_1, v_2, \ldots$$

  Le lettere $x, y, z, \ldots$, eventualmente decorate con apici o pedici, indicano una generica variabile v_n,
- dei simboli di costante $c, d, e, \ldots$,
- dei simboli di funzione $f, g, h, \ldots$,
- dei simboli di predicato $P, Q, R, \ldots$

Ad ogni simbolo di funzione e di predicato è associato un numero intero positivo detto **arietà** del simbolo — i simboli di arietà 1, 2 e 3 si dicono, rispettivamente, simboli unari, binari e ternari. La arietà di f o di P è indicata con $\mathrm{ar}(f)$ e $\mathrm{ar}(g)$.

Termini.

L'insieme dei **termini** di un linguaggio L è definito induttivamente dalle clausole:

una variabile è un termine,

un simbolo di costante è un termine,

un'espressione del tipo $f(t_1, \ldots, t_n)$ è un termine, dove f è un simbolo di funzione n-ario e $t_1, \ldots, t_n$ sono termini.

Formalmente, se Vbl è l'insieme delle variabili, Const è l'insieme dei simboli di costante e Func è l'insieme dei simboli di funzione del linguaggio L , consideriamo l'insieme

$$\mathcal{S} = \Big(\{(,)\} \cup \mathrm{Vbl} \cup \mathrm{Const} \cup \mathrm{Func}\Big)^{*}$$

di tutte le stringhe di parentesi, variabili, simboli di costante e di variabile, e definiamo una funzione

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathscr{P}(\mathcal{S}), \qquad n \mapsto \mathrm{Term}_n$$

nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \mathrm{Term}_0 &= \mathrm{Vbl} \cup \mathrm{Const}, \\ \mathrm{Term}_{n+1} &= \{f(t_1, \ldots, t_n) \mid f \in \mathrm{F} \text{ e } t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{Term}_n \text{ e } n = \mathrm{ar}(f)\}. \end{aligned}$$

L'insieme dei termini è

$$\mathrm{Term} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Term}_n .$$

Un termine t è una stringa di simboli (ottenuta secondo un protocollo ben definito), ma può essere visualizzato meglio mediante il suo **albero sintattico** in cui la radice è etichettata da t e gli altri nodi sono etichettati da termini che compongono t. Per esempio l' albero sintattico del termine

$$h(f(h(x,z,g(f(c),y))),g(x,f(g(z,y))),f(h(f(z),h(y,c,x),z))), \quad (1)$$

dove c è un simbolo di costante e f, g e h sono simboli di funzione di arietà 1, 2 e 3, è l'oggetto descritto nella Figura 1.

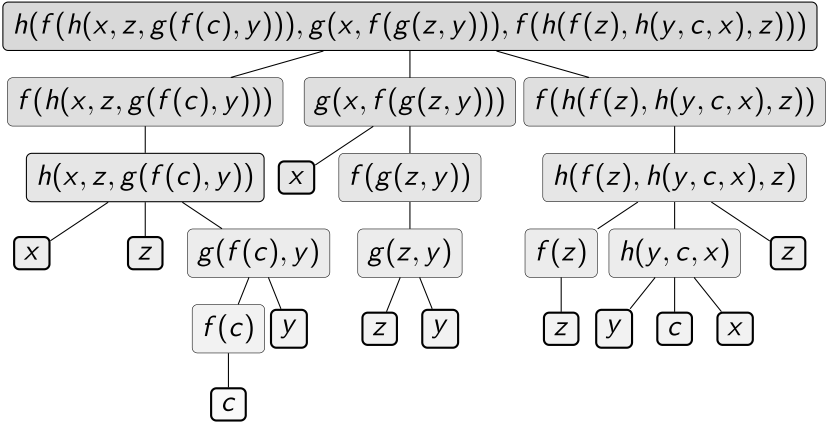


Figura: L'albero sintattico del termine descritto nella (1).

I nodi terminali, cioè quelli che non hanno nessun nodo al di sotto di essi, sono etichettati con le variabili e coi simboli di costante e sono evidenziati da una cornice più spessa. Potremmo anche semplificare la notazione etichettando ogni nodo non terminale il simbolo di funzione usata per costruire quel termine. In questo caso l'albero sintattico può essere disegnato come nella Figura 2.

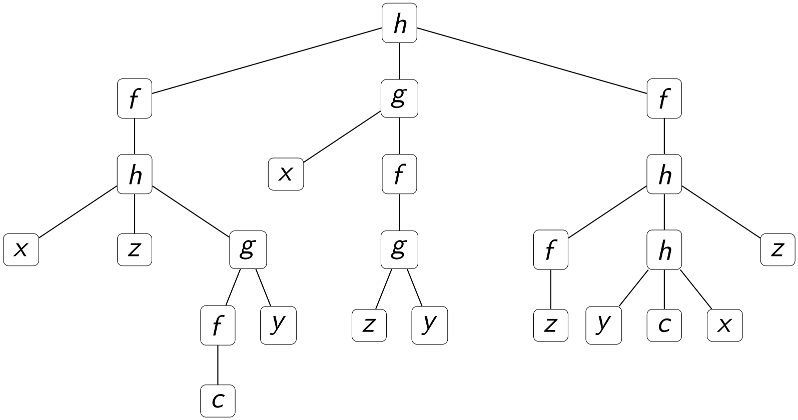


Figura: Una descrizione semplificata dell'albero sintattico della Figura 1.

Le parentesi (e le virgole) non sono strettamente necessarie per descrivere un termine, servono solo per agevolare la nostra lettura. Per esempio se sappiamo che $\mathrm{ar}(f) = 1$, $\mathrm{ar}(g) = 2$, $\mathrm{ar}(h) = 3$ e che c è una costante, il termine descritto in (1) può essere scritto come

$$hfhxzgfcygxfgzyfhfzhycxz.$$

Per rimettere al proprio posto le parentesi, si comincia ad individuare nella stringa qui sopra i termini di altezza 1, cioè le funzioni applicate a termini di altezza 0...

$$hfhxzg\ f(u)\ ygxf\ g(z,y)\ fh\ f(z)\ \ h(y,u,x)\ z$$

...passiamo poi a quell di altezza 2...

$$hfhxz\ g(f(u),y)\ gx\ f(g(z,y))\ f\ h(f(z),h(y,u,x),z)$$

...poi a quelle di altezza 3...

$$hf\ h(x,z,g(f(u),y)\ \ g(x,f(g(z,y))\ \ f(h(f(z),h(y,u,x),z)$$

...poi a quelli di altezza 4...

$$h\ f(h(x,z,g(f(u),y))\ g(x,f(g(z,y)))f(h(f(z),h(y,u,x),z)$$

...e a questo punto riotteniamo la scrittura (1).

Notazione.

Se f è un simbolo di funzione binaria, si usa solitamente la notazione infissa $t_1\ f\ t_2$ invece di quella prefissa $f(t_1, t_2)$. In particolare scriveremo $t_1 + t_2$ e $t_1 \cdot t_2$ al posto di $+(t_1, t_2)$ e $\cdot(t_1, t_2)$.

Se f è un simbolo di funzione binaria, l'espressione $t_1\ f \ldots f\ t_n$ è ambigua, dato che dipende da dove inseriamo le parentesi. Per esempio, le possibili definizioni di $t_1\ f\ t_2\ f\ t_3$ sono due: $t_1\ f\ (t_2\ f\ t_3)$ e $(t_1\ f\ t_2)\ f\ t_3$. In generale, il numero di modi possibili di mettere le parentesi tra $n+1$ oggetti è dato da $\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$.

Convenzione.

Nell'espressione $t_1\ f \dots f\ t_n$ si intende sempre che si associa a destra, cioè $t_1\ f\ (t_2\ f\ (\dots (t_{n-1}\ f\ t_n) \dots))$. In particolare $t_1 + \cdots + t_n$ sta per $t_1 + (\cdots + (t_{n-1} + t_n) \cdots)$ e $t_1 \cdot \cdots \cdot t_n$ sta per $t_1 \cdot (\cdots \cdot (t_{n-1} \cdot t_n) \cdots)$. Utilizzeremo le abbreviazioni

$$nt \text{ al posto di } \underbrace{t + \cdots + t}_{n} \quad \text{e} \quad t^n \text{ al posto di } \underbrace{t_1 \cdot \cdots \cdot t_n}_{n}.$$

Infine, se f è un simbolo di funzione unaria e t è un termine, la scrittura

$$f^{(n)}(t)$$

denota il termine

$$\underbrace{f(\dots f}_{n \text{ volte}}(t) \dots).$$

Una misura di complessità per i termini è una funzione dall'insieme dei termini a valore nei numeri naturali tale per cui la complessità di un termine t sia sempre maggiore della complessità dei termini che concorrono a costruire t. Abbiamo due misure naturali di complessità per un termine t:

- $\mathrm{lh}(t)$, la **lunghezza** (incluse le parentesi) della stringa t e
- $\mathrm{ht}(t)$, l'**altezza** di t, cioè la massima lunghezza di un cammino nell'albero sintattico di t che parta dalla radice ed arrivi ad un nodo terminale.

Quindi se t è il termine descritto in (1) a pagina 40, allora $\mathrm{lh}(t) = 48$ e $\mathrm{ht}(t) = 5$.

Osservazione.

Le misure di complessità come lh e ht, sono utili per fare dimostrazioni per induzione sull'insieme dei termini. Per esempio, per verificare che ogni termine gode di una proprietà $\mathcal{P}$ si verifica che la proprietà $\mathcal{P}$ vale per i termini di complessità minima (caso base) e che se $\mathcal{P}$ vale per tutti i termini di complessità inferiore alla complessità di t, allora anche t gode della proprietà $\mathcal{P}$.

Formula atomica

Una **formula atomica** è un'espressione della forma

$$P(t_1, \ldots, t_n)$$

oppure della forma

$$t_1 = t_2$$

dove $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sono termini e P è un simbolo di predicato n-ario.
L'insieme delle **formule** è definito induttivamente dalle clausole:

- una formula atomica è una formula,
- se φ è una formula, allora anche $(\neg\varphi)$ è una formula,
- se φ e ψ sono formule, allora anche $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ e $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ sono formule,
- se φ è una formula e x è una variabile, allora anche $\exists x\varphi$ e $\forall x\varphi$ sono formule.

Useremo le lettere greche φ, ψ, e χ, variamente decorate, per le formule.Una formula della forma $\neg(\varphi)$ è detta negazione; analogamente, una formula della forma $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$, $\exists x \varphi$ e $\forall x \varphi$ è detta, rispettivamente, congiunzione, disgiunzione, implicazione, bi-implicazione, **formula esistenziale** e **formula universale**. Una formula del linguaggio L si dice L-formula.

Convenzioni.

1. Per evitare l'eccessivo proliferare di parentesi, le sopprimeremo quando ciò non comporti ambiguità. Per esempio scriveremo $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ e $\varphi \Leftrightarrow \psi$ invece di $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, ...; ma se vogliamo prendere la negazione di una di queste formule reintrodurremo le parentesi. Seguiremo la convenzione che $\wedge$ e $\vee$ legano più fortemente di $\rightarrow$ e $\Leftrightarrow$, e che $\neg$ lega più fortemente di tutti gli altri connettivi. Quindi

$$\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi, \quad \neg\varphi \vee \psi$$

sono abbreviazioni per

$$((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi)\,, \quad ((\neg\varphi) \vee \psi)\,.$$

In analogia con quanto detto per i termini, se $\square$ è un connettivo binario (cioè diverso da $\neg$) scriveremo $\varphi_1 \square \ldots \square \varphi_n$ al posto di $\varphi_1 \square (\varphi_2 \square (\ldots \square \varphi_n) \ldots)$.

Convenzioni.

2. Se P è un simbolo di relazione binario spesso useremo la notazione infissa $t_1 \; P \; t_2$ al posto della notazione prefissa $P(t_1, t_2)$. In particolare, scriveremo $s < t$ invece di $<(s, t)$.

   $t_1 \neq t_2$ è un'abbreviazione di $\neg(t_1 = t_2)$.

Una **sottoformula** di una formula φ è una formula usata per costruire φ. In altre parole:

- se φ è atomica, allora non ha sottoformule,
- se φ è $\neg\psi$, allora le sue sottoformule sono ψ e le sottoformule di ψ,
- se φ è $\psi \Box \chi$ dove $\Box$ è un connettivo binario, allora le sue sottoformule sono: ψ, χ, le sottoformule di ψ e le sottoformule di χ,
- se φ è $\exists x \psi$ o $\forall x \psi$, allora le sottoformule di φ sono ψ e tutte le sottoformule di ψ.

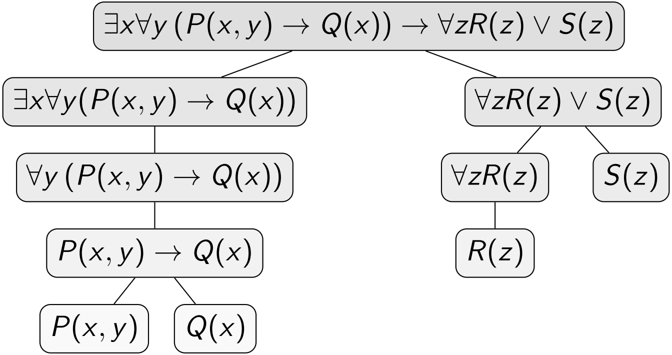
Per esempio, le sottoformule della formula

$$\exists x \forall y \,(P(x,y) \to Q(x)) \to \forall z R(z) \vee S(z) \tag{2}$$

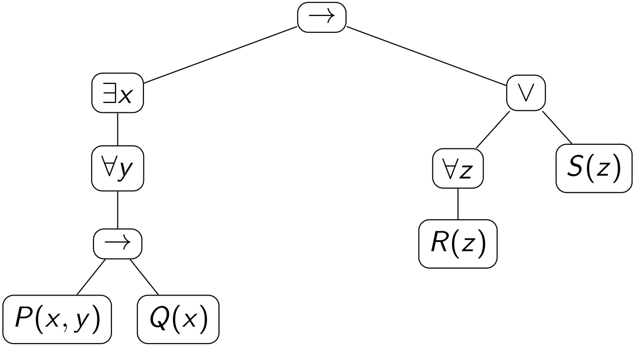
sono $\exists x \forall y \,(P(x,y) \to Q(x))$, $\forall z R(z) \vee S(z)$ e tutte le sottoformule di queste due. Quindi la lista completa delle sottoformule di (2) è:

$$\begin{array}{rcl} \exists x \forall y (P(x,y) \to Q(x)) & \qquad & \forall z R(z) \vee S(z) \\ \forall y (P(x,y) \to Q(x)) & & \forall z R(z) \\ P(x,y) \to Q(x) & & R(z) \\ P(x,y) & & S(z) \\ Q(x) & & \end{array}$$

Come per i termini, anche le formule possono essere descritte mediante alberi: l'albero sintattico della formula (2) è



o più semplicemente



Anche in questo caso abbiamo due nozioni di complessità: la lunghezza e l'altezza, definite in modo del tutto simile a quanto detto per i termini a pagina 48.

Variabili libere e vincolate.

Ogni formula contiene una quantità finita di variabili e ogni volta che una variabile compare in una formula parleremo di **occorrenza della variabile nella formula**. Per esempio la variabile z occorre tre volte nella formula (2) a pagina 55: nelle prime due occorrenze la z è muta dato che dire $\forall z R(z)$ ha lo stesso significato di $\forall u R(u)$, cioè ogni oggetto gode della proprietà R, mentre la terza occorrenza serve per asserire che z gode della proprietà S. Le occorrenze del primo tipo si dicono **vincolate**,quelle del secondo tipo si dicono **libere**.

Definizione.

Sia φ una formula e x una variabile.

- Se φ è atomica allora ogni occorrenza di x in φ è libera.
- Se φ è della forma $\neg\psi$ allora le occorrenze libere di x in φ sono esattamente quelle di x in ψ.
- Se φ è della forma $\psi\Box\chi$, dove $\Box$ è un connettivo binario, allora le occorrenze libere di x in φ sono quelle di x in ψ e quelle di x in χ.
- Supponiamo φ sia della forma $\exists y\psi$ oppure $\forall y\psi$. Se y è la variabile x, allora tutte le occorrenze di x in φ sono vincolate. Se invece y è una variabile diversa da x, allora le occorrenze libere di x in φ sono esattamente le sue occorrenze libere di x in ψ.

Diremo che la variabile x occorre libera in φ (equivalentemente: x è una variabile libera di φ) se c'è almeno un'occorrenza libera di x in φ. La notazione

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

serve per porre in evidenziare il fatto che le variabili che occorrono libere in φ sono alcune tra le $x_1, \ldots, x_n$. (Non richiediamo che *ogni* $x_1, \ldots, x_n$ compaia libera o compaia del tutto in φ ed è perfettamente possibile che la formula non contenga alcuna variabile libera, o addirittura nessuna variabile.) L'insieme delle variabili libere di φ è indicato con

$$FV(\varphi).$$

Enunciato.

Un **enunciato** o **formula chiusa** è una formula che non contiene variabili libere, cioè $FV(\varphi) = \emptyset$. La **chiu sura universale di una formula** φ è la formula $\varphi^{\forall}$ ottenuta quantificando universalmente tutte le variabili libere di φ; se invece quantificando esistenzialmente tutte le variabili libere si ottiene **chiusura esistenziale** $\varphi^{\exists}$. Nell'uso comune le formule prive di quantificatori sono considerate equivalenti alla loro chiusura universale.

Dal linguaggio naturale alla logica

Noi saremo interessati a linguaggi simbolici in cui formiamo proposizioni a partire da nomi o da altre proposizioni mediante operazioni che corrispondono a modi di costruzione delle proposizioni che si trovano nei linguaggi naturali (in particolare, l'italiano). Nella logica matematica, tuttavia, resta ben poco della struttura altamente complessa di un linguaggio naturale. La semplificazione è guidata dalla volontà di restringersi ad espressioni matematiche.

Si devono evitare ambiguità e ridondanze, con l'obiettivo di capire e far emergere la struttura logica.

Esempio.

La frase

La vecchia porta la sbarra

è ambigua, dato che può essere intesa come

la vecchia signora trasporta un oggetto che risulta essere una sbarra

oppure come

l'antica porta, la sbarra

dove *la* si riferisce, presumibilmente, ad una strada.

Predicati e relazioni nei linguaggi naturali

Esempio.

La frase

Giovanni vede Mario che è malato e piange

è ambigua per ragioni di scansione, occorrono delimitatori come le virgole. Infatti questa frase potrebbe essere intesa come

Giovanni vede Mario, il quale è malato e piange

oppure come

Giovanni vede Mario che è malato, e a causa di ciò Giovanni piange.

Esempio.

Come nell'Esempio precedente, la frase

> *Se l'uomo sapesse realmente il valore che ha una donna andrebbe a quattro zampe alla sua ricerca*[a]

cambia completamente significato a seconda di dove si inserisce la virgola: dopo *donna* oppure dopo *ha*.

[a] Questo esempio è dovuto alla scrittore e poeta argentino Julio Cortázar (1914–1984), il quale scrisse che "la virgola è la porta girevole del pensiero".

Le frasi elementari nel linguaggio naturale sono di diverso tipo, ma in tutte si può individuare un soggetto, un verbo e un complementoi.

Nella terminologia logica si introducono *proprietà* e *relazioni*; le primi corrispondono ai verbi intransitivi e alla copula "essere", le seconde ai verbi transitivi e corrispondono ai predicati introdotti nel capitolo precedente.

Vediamo come la nozione di termine, già introdotta per i linguaggi del prim'ordine, è essere usata nei linguaggi naturali.

Termini nei linguaggi naturali

I soggetti o gli oggetti, più in generale i termini tra cui sussiste una relazione, sono indicati da vari costrutti linguistici. Il più semplice è il nome proprio, come "Giovanni" e "Maria" — questi corrispondono alle costanti. Gli altri sono le descrizioni e i nomi comuni.

In "Maria ama il padre di Giovanni", "padre di Giovanni" è una descrizione, ben precisa, di una persona. Analogamente "il quadrato di 2" è una descrizione di un numero; entrambe le descrizioni sono ottenute applicando una funzione, nel primo caso "padre di" nel secondo "il quadrato di", a descrizioni più semplici, che in questi esempi sono nomi. Si possono dare descrizioni più complesse, come "la madre del padre di Giovanni" o "meno il quadrato di 2".

Osservazioni.

Nella grammatica, un ruolo fondamentale è svolto dai pronomi, che si presentano in grande varietà, come "uno", "chiunque", "ogni", "qualche" e simili.
I pronomi servono a formare nuove frasi collegandone alcune che hanno un riferimento in comune; nella frase "se uno ha un amico, è fortunato" si individuano due proposizioni componenti "uno ha un amico" e "è fortunato". La seconda frase non presenta il soggetto, ma s'intende che è lo stesso della prima; si può ripetere ("uno è fortunato") oppure più spesso, in altri casi, si deve precisare, con un indicatore che faccia capire esplicitamente che il soggetto è lo stesso (ad esempio "egli", "costui" e simili).

Osservazioni.

Nella seconda di due frasi collegate, il soggetto della prima può essere presente come oggetto, ad esempio in "se uno è generoso, tutti ne dicono bene", dove "ne" significa "di lui". Il simbolismo deve essere arricchito.
L'uso dei pronomi è standardizzato per mezzo di simboli che si chiamano variabili: $x, y, \ldots$. Il simbolo x sta per "una cosa", "uno", "una persona" se il discorso si riferisce a esseri umani, "un numero" se il discorso si riferisce ai numeri e così via.
La variabile è creduta un elemento alieno del linguaggio, che compare solo nei simbolismi matematici, ma non è così. "Se uno ha un amico, è fortunato" equivale nella semiformalizzazione a: "se x ha un amico, x è fortunato".

Esempio.

La struttura di una frase del tipo "Giovanni dorme" è rappresentata da "dorme(Giovanni)", o

$$P(a).$$

"Giovanni ama Maria" da "ama(Giovanni, Maria)", o

$$R(a, b).$$

Più in generale, i termini a cui si applica la relazione non sono necessariamente costanti, o nomi, ma anche descrizioni, come "Il padre di Giovanni ama Maria", che diventa

$$R(f(a), b),$$

o descrizioni incomplete, cioè contenenti variabili, come

$$\text{"Uno dorme":} \qquad P(x).$$

Quantificatori nei linguaggi naturali L'uso delle variabili o della loro versione con pronomi presenta aspetti delicati per trattare i quali il formalismo finora introdotto non è abbastanza discriminante.
Nella frase "se uno ha un amico, è fortunato" ci sono due tipi di "uno", il primo "uno" è il soggetto, presente tacitamente anche come soggetto di "è fortunato", e il secondo è l'"un" di "ha un amico".[7] Il primo "uno" significa "chi", nel senso di "chiunque", il secondo significa "qualche". La stessa parola "uno", e le corrispondenti variabili x e y possono cioè avere sia un senso universale che uno particolare.

---

[7] Non c'è differenza tra "uno" e "un"; si potrebbe dire in entrambi i casi "una persona", ristabilendo l'uniformità.

La frase "uno che ha un amico è fortunato" diventa, schematizzata,

$$\forall x(\exists y(A(x,y)) \to F(x)),$$

dove A è un simbolo di predicato binario che designa la relazione di amicizia e F è il predicato unario che designa la proprietà di "essere fortunato". Le variabili svolgono il ruolo di "uno", "una cosa", "un numero" e simili; di quale esattamente dipende dall'universo di discorso. Questo va precisato, in vari modi. Spesso la scelta dei predicati e delle relazioni suggerisce implicitamente di cosa si parla: se si usa una relazione A per "essere amico di ..." è implicito che si parla di persone o animali. Allora $\forall x(\exists y A(x,y) \to F(x))$ si legge "ogni persona o animale che abbia ...".

Nel formalismo logico la restrizione dei quantificatori avviene nel seguente modo. La frase "tutti i tedeschi sono biondi" si rappresenta con due predicati, "tedesco" e "biondo", e la forma

$$\forall x(T(x) \to B(x)),$$

dove il quantificatore $\forall x$ è letto "per tutte le persone", cioè con la x che varia su tutto l'universo del discorso (la specie umana): "per ogni x, se x è tedesco allora x è biondo".

Questa forma è corretta grazie alle proprietà del condizionale, che vedremo meglio in seguito. Se $T(x) \to B(x)$ è vero per tutte le persone, allora ogni tedesco rende vero il condizionale, l'antecedente e quindi vero il conseguente, ed è vero che tutti i tedeschi sono biondi; se viceversa è vero che tutti i tedeschi sono biondi, anche l'enunciato di sopra che si riferisce con $\forall x$ non ai tedeschi ma a tutte le persone è vero: se uno è tedesco, allora è biondo e il condizionale è vero; se Giovanni è biondo ma non è tedesco, lo si vorrà considerare un controesempio che falsifica l'affermazione? Non sembra ragionevole; si assume che $T(\text{Giovanni}) \to B(\text{Giovanni})$ sia vero, e così $T(x) \to B(x)$ è vera per tutte le persone.

In pratica, gli aggettivi sono resi da predicati con l'ausilio del condizionale: in "tutte le persone tedesche sono bionde" l'aggettivo "tedesco" diventa il predicato "essere tedesco" e la frase "tutte le persone, se sono tedesche, sono bionde".
"Tutti i P sono ..." e "qualche P è ...", dove P delimita il campo di variabilità del riferimento, si realizzano dunque introducendo un predicato unario P e scrivendo rispettivamente $\forall x(P(x) \to \ldots)$ e $\exists x(P(x) \wedge \ldots)$. Si noti ovviamente la differenza nel caso del quantificatore esistenziale, dove la restrizione è realizzata con la congiunzione, che viene dalla traduzione di "esiste uno che è P e che ...".

Esempi.

1.

"Maria ama il padre di Giovanni" è formalizzata da

$$A(m, f(g)),$$

dove m e g sono costanti, m per "Maria" e g per "Giovanni", ed f un simbolo funzionale per "il padre di . . . ".

2.

Per formalizzare "Maria ama il figlio di Giovanni" non si può usare un simbolo f per "il figlio di", perché "figlio di" non è una funzione univoca: a una persona possono corrispondere diversi figli, o nessuno. Allora "Maria ama il figlio di Giovanni" si formalizza come sotto "Maria ama un figlio di Giovanni" e a parte si afferma che Giovanni ha un solo figlio (vedremo come).

Esempi.

3.

"Maria ama un figlio di Giovanni" è formalizzata da

$$\exists x(A(m,x) \wedge F(x,g)),$$

letta

esiste un x tale che Maria ama x e x è figlio di Giovanni,

dove F è un simbolo *relazionale* a due posti, e $F(x,y)$ sta per "x è figlio di y".

Esempi.

4.

"Maria ama i figli di Giovanni", che significa che Maria ama tutti i figli di Giovanni, si formalizza con

$$\forall x(F(x,g) \to A(m,x))$$

e non con $\forall x(A(m,x) \wedge F(x,g))$; questa significa che tutti sono figli di Giovanni, e che Maria li ama tutti.
Per la formalizzazione corretta, può essere utile vedere nella frase un caso di quantificatore ristretto, ai figli di Giovanni, leggendola "Tutti i figli di Giovanni, Maria li ama" o al passivo: "Tutti i figli di Giovanni sono amati da Maria".

Esempi.

5.

"Sono eligibili tutti e soli gli studenti in corso".
Non interessa a cosa siano eligibili; serve un predicato per "essere eligibile", uno per "essere studente" e uno per "essere in corso".

$$\forall x(E(x) \leftrightarrow S(x) \wedge C(x)).$$

La dizione "tutti e soli" è strettamente legata a "se e solo se". "Tutti gli studenti in corso sono eligibili" è formalizzata da

$$\forall x(S(x) \wedge C(x) \rightarrow E(x)),$$

mentre "solo gli studenti in corso sono eligibili" da

$$\forall x(E(x) \rightarrow S(x) \wedge C(x)).$$

La congiunzione di queste due ultime frasi è equivalente alla prima.

Esempi tratti dalla matematica.

1.

La frase "dati due numeri, uno minore dell'altro, esiste un terzo numero compreso tra i due", vera nel campo dei razionali e in quello dei reali, falsa negli interi, può essere resa da

$$\forall x \forall y (x < y \to \exists z (x < z \wedge z < y)).$$

La congiunzione $x < z \wedge z < y$ si può abbreviare, secondo l'uso matematico, con $x < z < y$.

2.

Se nella stessa formula il segno di relazione è interpretato su di una relazione riflessiva, come

$$\forall x \forall y (x \leq y \rightarrow \exists z (x \leq z \wedge z \leq y)),$$

o più in generale "se R è riflessiva allora ...", ovvero

$$\forall x R(x,x) \rightarrow \forall x \forall y (R(x,y) \rightarrow \exists z (R(x,z) \wedge R(z,y))),$$

allora la formula è banalmente vera per ogni relazione.[a]

[a] Con "banalmente" s'intende che dati x e y come z si può prendere o x o y, e la formula non ci dà veramente informazioni.

Esempi tratti dalla matematica.

Non esiste un quantificatore che quantifichi sulle coppie; ci si comporta come se la frase fosse "dato un primo numero e dato un secondo numero ...". Ma "un primo" e "un secondo" servono solo a facilitare l'espressione, si sarebbe potuto dire anche "dato un numero e dato un numero ...", con qualche difficoltà nel seguito per i riferimenti appropriati.

Si faccia attenzione che neanche la presenza di "due" vuol dire che i numeri devono essere considerati diversi; tale forma comune di espressione distingue il modo, il momento in cui i numeri sono presentati, o pensati, ma non è escluso in generale che si presenti lo stesso numero due volte.

"Dati due numeri" significa "fatta due volte la scelta di un numero", e le scelte possono cadere sullo stesso numero. In termini probabilistici, si tratta di scelte con reimmissione; oppure si deve considerare che la scelta di un numero non lo toglie certo dall'insieme. "Dati due numeri, esiste la loro somma" si può scrivere

$$\forall xy \exists z(z = x + y)$$

ma esiste anche la somma di ogni numero con se stesso; x e y possono prendere tutti i valori in tutte le combinazioni possibili, quindi anche valori uguali.

3.

"La relazione R è riflessiva", che significa che ogni elemento sta nella relazione R con se stesso, si scrive

$$\forall x R(x, x),$$

come abbiamo fatto sopra.

4.

"La relazione R è simmetrica", che significa che se la relazione R sussiste tra uno primo e un secondo elemento allora sussiste anche tra il secondo e il primo, si scrive

$$\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x)).$$

5.

"La relazione R è transitiva", che significa che se R sussiste tra un primo elemento e un secondo, e tra questo e un terzo, allora sussiste anche tra il primo e il terzo, si scrive,

$$\forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z)).$$

6.

Come non esiste un quantificatore sulle coppie, così non esiste un quantificatore che esprima "esiste esattamente un ...", o "esiste un solo ...". Tale locuzione si realizza mediante l'uguaglianza come nel seguente esempio.
La frase "dati due numeri, esiste un solo numero che è la loro somma" si formalizza come

$$\forall x \forall y \exists z (z = x + y \wedge \forall u (u = x + y \rightarrow u = z)).$$

In generale "Esiste un solo x tale che $P(x)$" si formalizza come

6.

La frase "dati due numeri diversi tra loro, esiste un numero che è propriamente compreso tra i due numeri dati" si rappresenta con

$$\forall x \forall y (x \neq y \to \exists z (x < z < y \lor y < z < x)).$$

dove $x \neq y$ è un'abbreviazione per $\neg(x = y)$.

7.

La frase "ogni numero positivo ha una radice quadrata", vera nei reali, falsa nei razionali, si rappresenta come

$$\forall x (0 < x \to \exists y (x = y^2)),$$

dove con y^2 si indica la funzione potenza di esponente 2.

8.

“Un numero è divisibile per un altro numero se e solo se esiste un terzo numero che moltiplicato per il secondo dà il primo”.
Scriviamo $x \mid y$ per “y è divisibile per x” o “x divide y” e usiamo il solito segno di moltiplicazione:

$$\forall x \forall y (x \mid y \leftrightarrow \exists z (y = x \cdot z)),$$

ma di nuovo si noti che x, y, z non devono necessariamente indicare numeri tutti diversi tra loro.

9.

"Esistono due numeri primi consecutivi".
Per questa frase complicata procediamo in due passi; usiamo un'abbreviazione pr(x) per "x è primo " e scriviamo

$$\exists x \exists y (x = y + 1 \wedge \mathrm{pr}(x) \wedge \mathrm{pr}(y))$$

riservandoci di sostituire pr(x) con la sua scrittura corretta data nel prossimo esercizio.
Che i numeri siano due non risulta dallo scrivere $\exists x \exists y$ ma da $x = y + 1$ che implica $x \neq y$ (lo si deduce facilmente dagli assiomi dei numeri naturali); si potrebbe anche scrivere:

$$\exists x (\mathrm{pr}(x) \wedge \mathrm{pr}(x + 1)),$$

dando per scontato, come sopra, che $x \neq x + 1$.

10.

"Un numero è primo se e solo se è maggiore di 1 ed è divisibile solo per 1 e per se stesso".
Per esprimere questa che è la definizione di un nuovo predicato usiamo un nuovo simbolo $\mathrm{pr}(x)$ e scriviamo

$$\forall x(\mathrm{pr}(x) \to x > 1 \wedge \forall z(z \mid x \to z = 1 \vee z = x))$$

11.

"2 è l'unico numero primo pari".
"Numero pari" significa "divisibile per 2". La frase si può trasformare in "2 è primo e pari e se un numero è primo e pari allora è uguale a 2". Quindi

$$\mathrm{pr}(2) \wedge 2 \mid 2 \wedge \forall x(\mathrm{pr}(x) \wedge 2 \mid x \to x = 2).$$

12.

"3 è dispari"

Il predicato "dispari" si può definire come "non pari" e quindi

$$\neg(2 \mid 3),$$

oppure dicendo che un numero dispari è della forma $2 \cdot y + 1$, e in aritmetica si dimostra che le due definizioni sono equivalenti, quindi

$$\exists y(3 = 2 \cdot y + 1).$$

13.

"Ogni primo maggiore di 2 è dispari" è un caso di quantificatore ristretto, ma lo si può restringere in due modi: ai numeri primi oppure ai numeri primi maggiori di 2. Il predicato "essere primo maggiore di 2" si può definire con $(\mathrm{pr}(x) \wedge x > 2)$ e si ha allora, se si scrive $\mathrm{disp}(x)$ per "x è dispari ",

$$\forall x((\mathrm{pr}(x) \wedge x > 2) \rightarrow \mathrm{disp}(x)).$$

Oppure se si restringe solo ai primi si deve scrivere

$$\forall x(\mathrm{pr}(x) \rightarrow (x > 2 \rightarrow \mathrm{disp}(x))).$$

In questo caso le parentesi interne servono a evidenziare la composizione corretta della frase mediante le due occorrenze del condizionale.

14.

"Ci sono almeno due quadrati minori di 10".
Consideriamo 10 una costante (in realtà è un termine complesso). "x è un quadrato" significa che x è il quadrato di qualche numero, e si formalizza come $\exists u(x = u^2)$. Quindi

$$\exists x \exists y (x \neq y \wedge x < 10 \wedge y < 10 \wedge \exists u(x = u^2) \wedge \exists u(y = u^2)).$$

Si noti che da $\exists u(x = u^2) \wedge \exists u(y = u^2))$ non segue che la u sia la stessa, e quindi x e y uguali; le due frasi sono indipendenti; è come se si dicesse: "esiste *un numero* il cui quadrato è x ed esiste *un numero* il cui quadrato è y"; non vuol dire che sia lo stesso numero. Ma si sarebbe potuto anche scrivere $\exists u(x = u^2) \wedge \exists v(y = v^2))$.

15.

"La funzione $y = x^3$ è iniettiva e suriettiva" si formalizza

$$\forall x_1 \forall x_2 (x_1 \neq x_2 \to x_1^3 \neq x_2^3) \wedge \forall y \exists x (y = x^3),$$

in un linguaggio che abbia un simbolo funzionale indicato con x^3.

16.

L'affermazione che la relazione "$y = 2 \cdot x$" è una relazione funzionale e iniettiva è formalizzata da:

$$\forall x \exists y (y = 2 \cdot x \wedge \forall z (z = 2 \cdot x \to z = y)) \wedge \forall x_1 \forall x_2 (x_1 \neq x_2 \to 2 \cdot x_1 \neq 2 \cdot x_2).$$

Due insiemi X e Y sono **equipotenti**, in simboli

$$X \approx Y,$$

se c'è una funzione $f\colon X \to Y$ biettiva. La relazione $\approx$ è una relazione di equivalenza; spesso diremo che due insiemi equipotenti X e Y hanno la medesima **cardinalità** e scriveremo

$$|X| = |Y|.$$

Per definizione, un insieme è **finito** se e solo se è in biezione con $\{0, \ldots, n-1\}$, per qualche $n \in \mathbb{N}$, dove poniamo $\{0, \ldots, n-1\} = \emptyset$ quando $n = 0$. Se X è finito scriveremo

$$|X| = n.$$

Un insieme X **si inietta in** Y, in simboli

$$X \precsim Y$$

se c'è una funzione iniettiva $f\colon X \to Y$; in questo caso scriveremo che

$$|X| \leq |Y|.$$

Proposizione

Se $X \precsim Y$ e $X \neq \emptyset$, allora c'è una suriezione $\pi\colon Y \to X$.

Dimostrazione.

Sia $f\colon X \to Y$ iniettiva e sia $x_0 \in X$. Definiamo

$$\pi(y) = \begin{cases} f^{-1}(y) & \text{se } y \in \operatorname{ran} f \\ x_0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$\square$

Il simbolo $\leq$ suggerisce che si tratti di una relazione di ordine sulle cardinalità: la proprietà riflessiva e transitiva sono immediate, mentre la proprietà antisimmetrica è garantita dal seguente risultato.

Teorema:Cantor-Schröder-Bernstein

Se $X \precsim Y$ e $Y \precsim X$ allora $X \approx Y$.

Dimostrazione.

Fissiamo due funzioni iniettive $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to X$. Sia $\Phi\colon \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ la funzione

$$\Phi(Z) = X \setminus g[Y \setminus f[Z]].$$

Se $Z_1 \subseteq Z_2$ allora $f[Z_1] \subseteq F[Z_2]$, quindi $Y \setminus f[Z_1] \supseteq Y \setminus f[Z_2]$, quindi $g[Y \setminus f[Z_1]] \supseteq g[Y \setminus f[Z_2]]$, da cui $X \setminus g[Y \setminus f[Z_1]] \subseteq X \setminus g[Y \setminus f[Z_2]]$.

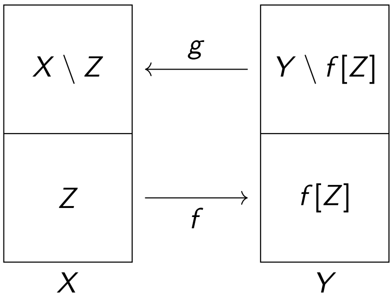
Dimostrazione.

Abbiamo quindi dimostrato che

$$Z_1 \subseteq Z_2 \to \Phi(Z_1) \subseteq \Phi(Z_2).$$

Poiché il reticolo $\mathscr{P}(X)$ è completo le ipotesi del Teorema del punto fisso di Tarski-Knaster **??** sono soddisfatte, quindi esiste un $Z \subseteq X$ tale che $\Phi(Z) = Z$, ovvero $X \setminus Z = g[Y \setminus f[Z]]$. Poiché g è iniettiva, g^{-1} è una biezione tra $X \setminus Z$ e $Y \setminus f[Z]$, quindi la funzione $h \colon X \to Y$

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in Z \\ g^{-1}(x) & \text{se } x \in X \setminus Z \end{cases}$$



Un insieme si dice **numerabile** se è in biezione con $\mathbb{N}$.

Proposizione

Se $X \subseteq \mathbb{N}$ non è finito, allora è numerabile.

Proposizione

Se $f : \mathbb{N} \to Y$ è suriettiva, allora Y è finito oppure numerabile.

Teorema

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$.

Proposizione

Se X e Y sono numerabili, allora anche $X \cup Y$ è numerabile.

Esempio.

$\mathbb{Z}$ è numerabile, dato che $\mathbb{N}$ e $\{k \in \mathbb{Z} \mid k < 0\}$ sono numerabili.

Teorema

$\mathbb{Q}$ è numerabile.

Se X è non vuoto, indichiamo con

$$X^{<\mathbb{N}} = \{(x_0, \ldots, x_{k-1}) \mid k \in \mathbb{N} \wedge \forall i < k\,(x_i \in X)\}\,,$$

l'insieme delle stringhe finite di elementi di X, con la convenzione che se $k = 0$ si prende la sequenza vuota $\emptyset$.

Teorema.

$\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ è numerabile.

Corollario.

$\{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ è numerabile.

Teorema di Cantor

Non esiste alcuna suriezione da X su $\mathscr{P}(X)$ e quindi $\mathscr{P}(X) \not\precsim X$.