Programmazione

– Metodi e ricorsione –

Francesco Tiezzi

Scuola di Scienze e Tecnologie

Sezione di Informatica

Università di Camerino

Lucidi originali di Pierluigi Crescenzi

Ancora sui metodi

- **Interfaccia** di un metodo
  - Consente di utilizzarlo senza sapere nulla dell'implementazione
  - Consente di implementarlo senza sapere nulla del suo utilizzo
- Deve dire
  - Cosa fare per invocare il metodo (sintassi)
  - Cosa il metodo è in grado di fare (semantica)
- Sintassi: regole molto rigide
  - Dichiarazione e definizione
    - Nome del metodo
    - Dati passati al metodo dall'esterno
    - Tipo di dato dell'eventuale valore di ritorno
    - Corpo del metodo
  - Invocazione
    - Nome del metodo
    - Lista di valori racchiusa tra parentesi tonde
- Semantica
  - Può essere specificata in modi diversi (spesso imprecisi)

Istruzioni return

- Un metodo non void deve includerne almeno una
  - Includerne una non implica che sia eseguita

```
int massimoDueNumeri( int n1, int n2 ) {
  int massimo = n1;
  if (n1<n2) {
    massimo = n2;
    return massimo;
  }
}
```

Parametri formali e argomenti

- Parametri formali
  - Spazi da riempire con valore al momento di invocazione
- Esempio

```
double numeroNepero( double epsilon )
```

  - `epsilon`: parametro formale
- Argomenti
  - Valori con cui riempire gli spazi bianchi
- Esempio

```
double numeroE = numeroNepero( 0.00001 );
```

  - `0.00001`: valore da assegnare a `epsilon`
  - Assegnazione avviene come prima cosa
    - Parametro formale è variabile inizializzata con valore di argomento corrispondente

Massimo comun divisore di numeri

- Dichiarazione del metodo

```
int mcd( int a, int b )
```

- Invocazione del metodo

```
int divisore = mcd( 90, 42 );
```

  - 90 assegnato ad `a`
  - 42 assegnato a `b`
- Meccanismo di sostituzione basato su **passaggio per valore**
  - Se argomento è variabile: solo valore viene assegnato
    - Se parametro formale modificato: variabile non cambia
  - Diverso per array e oggetti

Variabili locali

- Variabile dichiarata all'interno di un blocco
  - Sparisce quando esecuzione del blocco termina
- Esempio (genera errore di compilazione)

```
{    int numero = 1;  System.out.println( numero );
     numero = numero+1; }
System.out.println( numero );
```

- **Ambito di visibilità**: zona di programma in cui si può usare variabile
  - Due variabili possono avere stesso nome se hanno diverso ambito di visibilità

```
void stampaDoppio( int n ) {  int numero = 2*n;
  System.out.println( "Il doppio e' "+numero );
}
int numero = 3;
System.out.println( "Il numero e' "+numero );
stampaDoppio( numero );
System.out.println( "Il numero e' "+numero );
```

Variabili locali

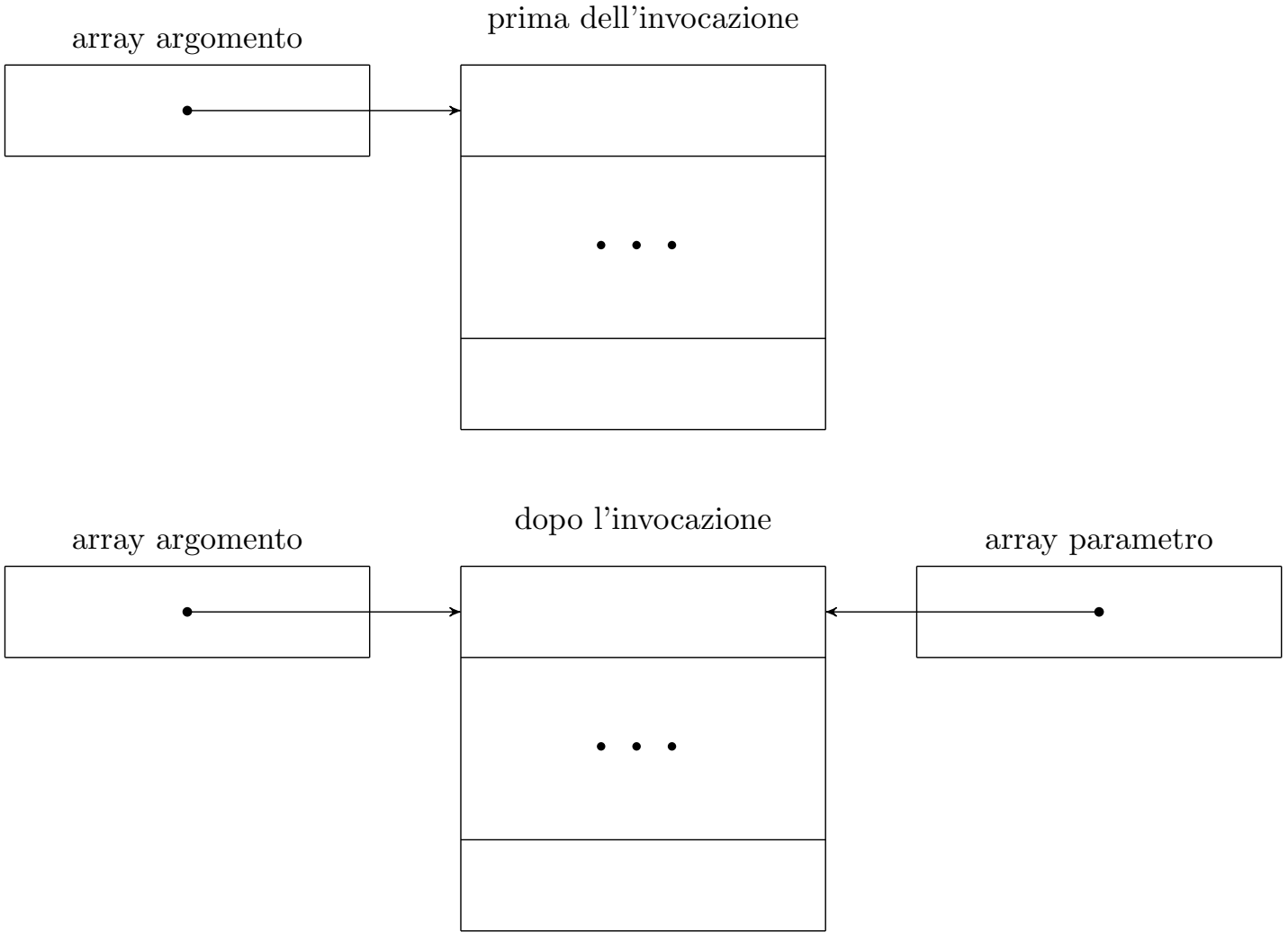
```
int f1( int b ) {
  int a = b+1;
  return a+1;
}
int f2( int a ) {
  int b = a-2;
  return b-2;
}
int b = 10,a = 10;
System.out.println( "a: "+a+", b: "+b );
b = f1( a );
a = f2( b );
System.out.println( "a: "+a+", b: "+b );
```

- Regole di buon senso
  - Più semplice dichiarare le variabili fuori del blocco
  - Non dichiarare variabili all'interno di cicli
    - Eccezione per inizializzazione di ciclo `for`

Uguaglianza di array

- Uguali se stessa lunghezza e stessi elementi

```
boolean arrayUguali( int[] a,int[] b ) {
  if (a.length!=b.length) {
    return false;
  }
  for (int i = 0; i<a.length; i++) {
    if (a[i]!=b[i]) {
      return false;
    }
  }
  return true;
}
```



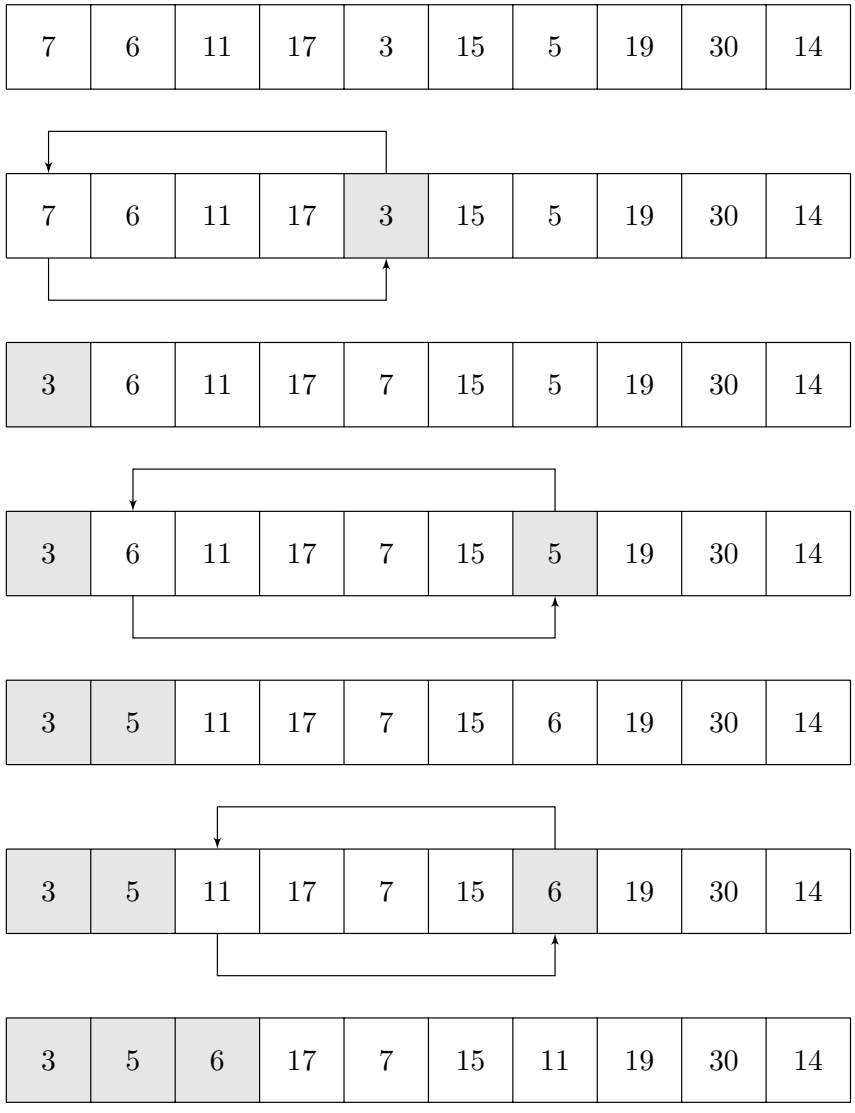
- Operando su array parametro formale, si opera su array argomento

Array come parametri formali

```
void raddoppiaArray( int[] numero ) {
  for ( int i = 0; i<numero.length; i++ ) {
    numero[i] *= 2;
  }
}
void stampaArray( int[] numero ) {
  System.out.print( "Array: " );
  for (int i = 0; i<numero.length; i++) {
    System.out.print( numero[i]+" " );
  }
  System.out.println(  );
}
```

Ordinamento di array

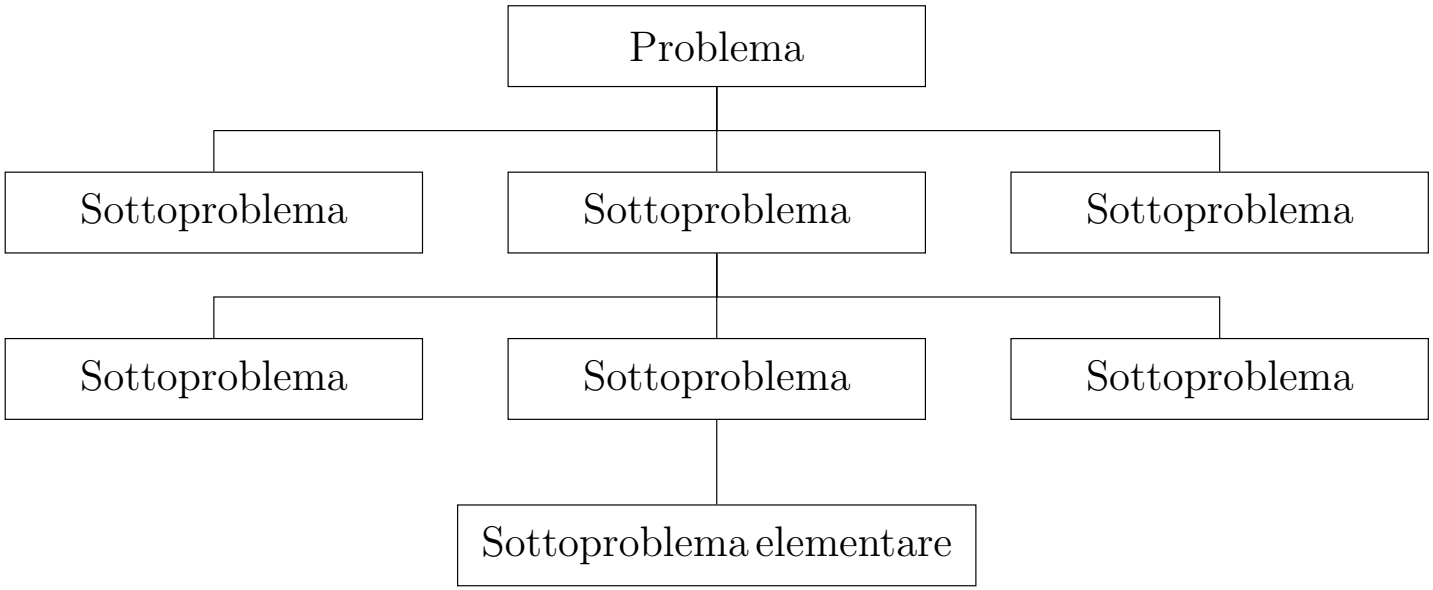
- Selection sort
  - Molto semplice e facile da capire
- Esegue le seguenti operazioni
  - Cerca nell'array l'elemento con il valore più piccolo
  - Lo scambia con il primo elemento
  - cerca tra gli elementi dell'array, escluso il primo, l'elemento con il valore più piccolo
  - Lo scambia con il secondo elemento
  - Ripete fino a che tutti gli elementi sono al posto giusto


7 6 11 17 3 15 5 19 30 14
7 6 11 17 3 15 5 19 30 14
3 6 11 17 7 15 5 19 30 14
3 6 11 17 7 15 5 19 30 14
3 5 11 17 7 15 6 19 30 14
3 5 11 17 7 15 6 19 30 14
3 5 6 17 7 15 11 19 30 14

```
void selectionSort( int[] a ) {
  int i,j,indiceProssimoMinimo,min,temp;
  for (i = 0; i<a.length-1; i++) {
    min = a[i];
    indiceProssimoMinimo = i;
    for (j = i+1; j<a.length; j++) {
      if (a[j]<min) {
        min = a[j];
        indiceProssimoMinimo = j;
      }
    }
    temp = a[i];
    a[i] = a[indiceProssimoMinimo];
    a[indiceProssimoMinimo] = temp;
  }
}
```

Programmazione procedurale

- Scompone problema in sotto-problemi più semplici
  - Fino a raggiungere sotto-problemi elementari

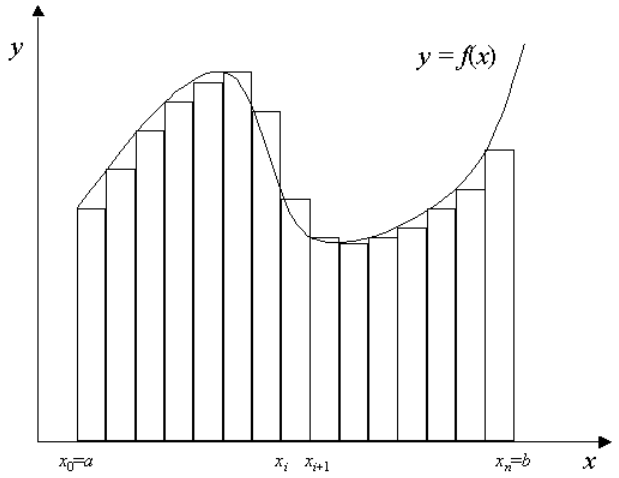


- Sotto-problemi il più possibile autonomi e indipendenti
  - Affrontabili in modo indipendente dagli altri
  - Riutilizzabili in altri contesti
- A ogni sotto-problema corrisponde procedura risolutiva

Programmazione procedurale

- In Java, metodi corrispondono a procedure
  - Interfaccia del metodo specifica come procedura va usata
  - Indipendenza di procedura implica che solo variabili locali siano modificate
- Indipendenza non implica nessuna relazione
  - Spesso, una procedura usa altre procedure
    - La prima non può essere usata fin quando le seconde non sono implementate
    - Sviluppo può proseguire in parallelo

Integrale di una funzione



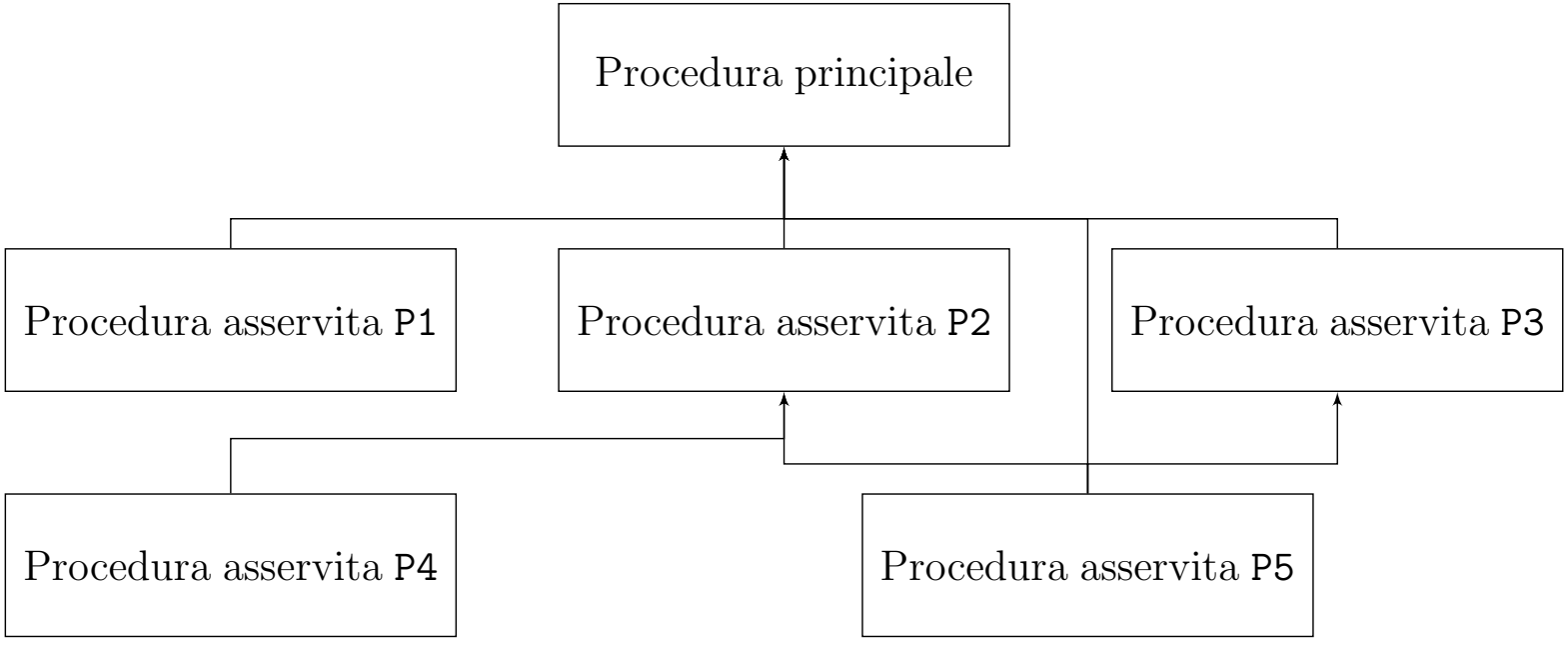

```
double integrale( double a,double b,int n ) {
  double h = (b-a)/n;
  double area = 0.0;
  for (int i = 0; i<n; i++) {
    area = area+h*f( a+i*h );
  }
  return area;
}
double f( double x ) {
  return 4/(1+x*x);
}
```

Programmazione procedurale

- Pre-condizioni e post-condizioni
  - Contratto firmato tra chi sviluppa procedura e chi usa procedura
- Pre-condizione
  - Requisito che deve essere soddisfatto da chi invoca il metodo
  - Metodo non responsabile se invocato in violazione di pre-condizioni
- Post-condizione
  - Valore restituito calcolato correttamente
  - Sistema in un determinato stato dopo esecuzione di metodo
    - Metodo responsabile di effetti collaterali

Programmazione procedurale

- Schema di programma basato su programmazione procedurale

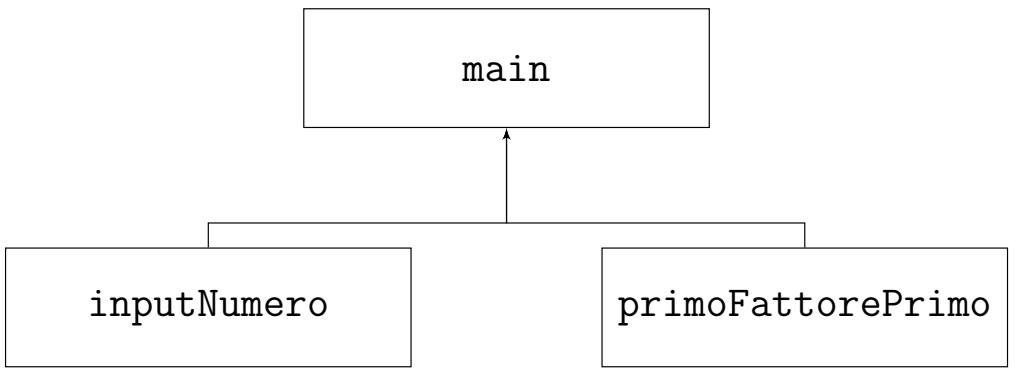


  - Stessa procedura asservita a più procedure
- In Java, procedura principale chiamata `main`

Fattori primi

1. Richiedere all'utente un numero intero compreso tra 2 e 1000
2. Se il numero inserito dall'utente è primo, stampare nuovamente il numero (in quanto unico fattore primo di se stesso)
3. Altrimenti calcolare il più piccolo fattore primo, stampare tale fattore e aggiornare il numero dividendolo per il fattore calcolato, ripetendo questa operazione fino a quando il numero non diventa minore di 2

- Tre procedure



- Procedura di input

```
int inputNumero( int l,int r ) {
  int n = Input.getInt( "Numero ("+l+"-"+r+")" );
  while ((n<l)||(n>r)) {
    n = Input.getInt( "Numero ("+l+"-"+r+")" );
  }
  return n;
}
```

- Pre-condizione
  - Argomenti: numeri interi positivi con `l` non maggiore di `r`
- Post-condizione
  - Valore di ritorno: numero incluso in $[\texttt{l}, \texttt{r}]$

- Procedura di ricerca fattore primo

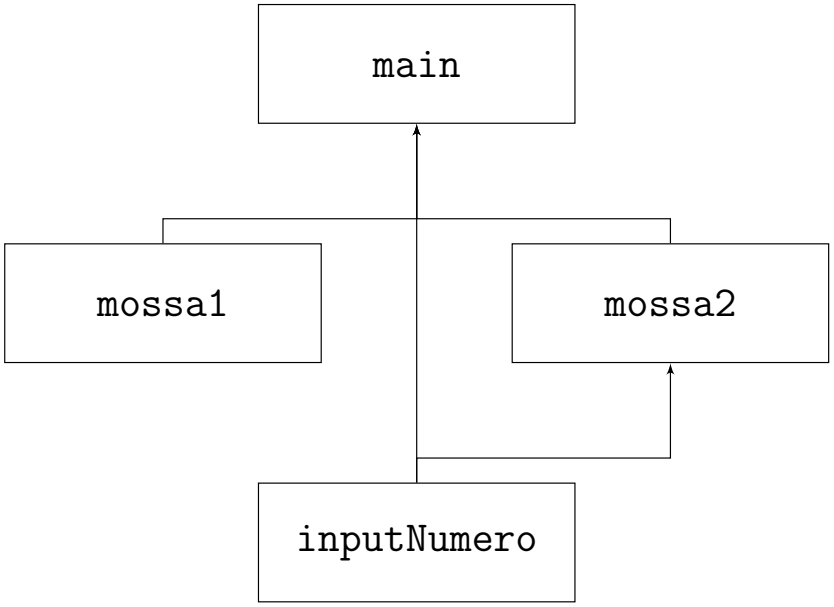
```
int primoFattorePrimo( int n ) {
  for (int i = 2; i<=n/2; i++ ) {
    if (n%i==0) {
      return i;
    }
  }
  return n;
}
```

- Pre-condizione
  - Argomento: numero interi positivi
- Post-condizione
  - Valore di ritorno: primo fattore primo di `n`

- Procedura di ricerca fattore primo

```
void main( ) {
  int numero = inputNumero( 2, 1000 );
  int fattore = 0;
  System.out.println( "Numero: "+numero );
  if ( primoFattorePrimo( numero ) == numero) {
    System.out.println( "Fattore: "+numero );
  } else {
    while (numero>1) {
      fattore = primoFattorePrimo( numero );
      System.out.println( "Fattore: "+fattore );
      numero = numero/fattore;
    }
  }
}
```

Il gioco della corsa della pedina



- `mossa1`: giocatore digitale
- `mossa2`: giocatore umano
- `inputNumero`: per chiedere primo giocatore e mossa umana

```
int mossa1(int p) {
  int mossa = 1;
  switch (p) {
    case 0:
    case 3: mossa = 2;
  }
  return mossa;
}
```

```
int inputNumero( int l,int r, int p ) {
  int n = Input.getInt( "("+l+"-"+r+","+p+")" );
  while ((n<l)||(n>r)) {
    n = Input.getInt( "("+l+"-"+r+","+p+")" );
  }
  return n;
}
```

```
int mossa2(int p) {
  return inputNumero(1,2,p);
}
```

```
void main() {
  int p = 0;
  int vincitore = 0;
  int turno = inputNumero(1,2,-1);
  int mossa = 0;
  while (vincitore==0) {
    if (turno==1) {
      mossa = mossa1(p);
    } else {
      mossa = mossa2(p);
    }
    p = p+mossa;
    if (p==5) {
      vincitore=turno;
    }
    turno = 3-turno;
  }
  System.out.println("Vincitore: "+vincitore);
}
```

Ricorsione

- Strumento potente per manipolazione di strutture matematiche
- Consente semplice formulazione di algoritmi
- Consente semplice dimostrazione di correttezza di algoritmi
- Metodi ricorsivi
  - Direttamente ricorsivi
    - Invocano sè stessi
  - Indirettamente ricorsivi
    - Invoca un altro metodo che invoca (direttamente o indirettamente) primo metodo

- Metodo direttamente ricorsivo per cercare numero intero in array ordinato

```
boolean esiste(int[] a, int l, int r, int k) {
  if (l>r) {
    return false;
  } else {
    int m = (l+r)/2;
    if (a[m]==k) {
      return true;
    } else {
      if (k<a[m]) {
        return esiste(a,l,m-1,k);
      } else {
        return esiste(a,m+1,r,k);
      }
    }
  }
}
```

- Metodi indirettamente ricorsivi

```
void stampaNumeroDispari( int n ) {
  System.out.println( "Numero dispari: "+n );
  if (n>1) {
    stampaNumeroPari( n-1 );
  }
}
void stampaNumeroPari( int n ) {
  System.out.println( "Numero pari: "+n );
  stampaNumeroDispari( n-1 );
}
void stampa( int n ) {
  if (n%2==0) {
    stampaNumeroPari( n );
  } else {
    stampaNumeroDispari( n );
  }
}
```

Metodi ricorsivi e numerologia

- Numero del destino
  - Somma cifre data di nascita ripetuta sino a quando una cifra
- Esempio: 21 Giugno 1961
  - 21061961
  - 2+1+0+6+1+9+6+1=26
  - 2+6=8
  - Numero del destino: 8
    - Persona “nata per guidare e a cui il destino fornirà le opportunità per esprimere i propri talenti nativi”

```
int sommaCifre( int numero ) {
  int risultato = 0;
  while (numero>0) {
    risultato += numero%10;
    numero = numero/10;
  }
  return risultato;
}
int destino( int numero ) {
  int temp = sommaCifre( numero );
  if (numero>9)
    return destino( temp );
  else
    return temp;
}
void main() {
  int n = Input.getInt( "Data (GGMMAAAA)" );
  System.out.println( "Destino: "+destino( n ) );
}
```

Ricorsione e iterazione

- In alcuni casi, è facile trasformare metodo ricorsivo in metodo non ricorsivo
  - Schema $A = \texttt{if}(E)\{S; A\}$
    - Diventa $A = \texttt{while}(E)\{S\}$
  - Schema $A = S; \texttt{if}(E)\{A\}$
    - Diventa $A = \texttt{do}\{S\}\texttt{while}(E);$
- Facendo uso di pila, ogni metodo ricorsivo può essere reso non ricorsivo

Ricorsione e fattoriale di un numero

- Metodo ricorsivo

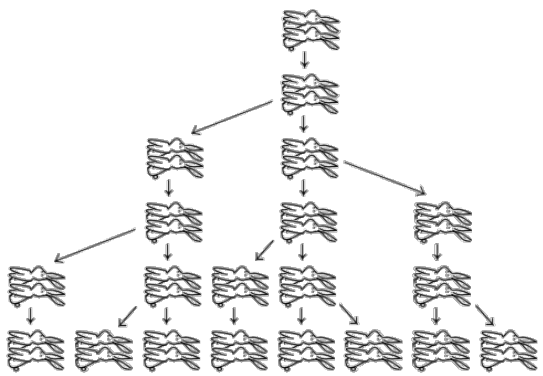
```
int fattorialeRicorsivo( int n ) {
  if (n>1) {
    return n*fattorialeRicorsivo( n-1 );
  } else {
    return 1;
  }
}
```

- Metodo non ricorsivo
  - Già visto: fa uso di `for`

Numeri di Fibonacci

- Divertissement matematico
  - Crescita popolazione conigli
    - Una coppia all'inizio
    - Ogni coppia diviene fertile dopo 1 mese
    - Ogni coppia fertile riproduce una nuova coppia ogni mese
  - Quante coppie di conigli dopo n mesi?

Mese 0	1
Mese 1	1
Mese 2	2
Mese 3	3
Mese 4	5
Mese 5	8

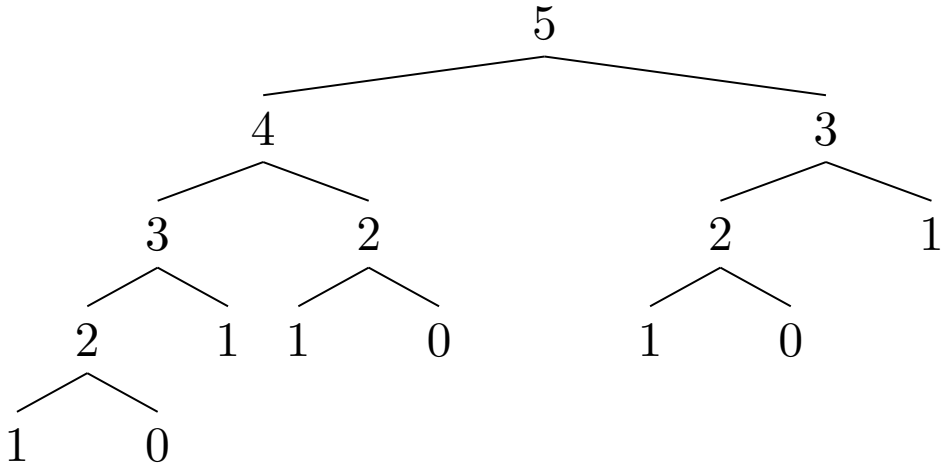


  - $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
    - F_{n-1}: coppie già esistenti
    - F_{n-2}: coppie nuove

- Metodo ricorsivo

```
long fiboRic( int n ) {
  if (n<2) {
    return n;
  } else {
    return fiboRic( n-1 )+fiboRic( n-2 );
  }
}
```

- Albero delle chiamate ricorsive



- Metodo iterativo

```
long fibonacci( int n ) {
  int i = 1;
  long x = 1, y = 0;
  if (n==0) return 0;
  while (i<n) {
    i = i+1;
    x = x+y;
    y = x-y;
  }
  return x;
}
```

- Costo lineare nell'indice che si vuole calcolare
- Ricorsione da evitare se soluzione iterativa ovvia
  - Confinata a casi in cui rende codice più facile da capire

Le torri di Hanoi

- 3 pioli e $n = 64$ dischi sul primo piolo (vuoti gli altri due)
- Ogni mossa sposta un disco in cima a un piolo
- Un disco non può poggiare su uno più piccolo
- Spostare tutti i dischi dal primo al terzo piolo
  - Leggenda: finito lo spostamento, il mondo scomparirà
- Metodo ricorsivo

```
void risolviHanoi( int n,int s,int d ) {
  if (n>0) {
    risolviHanoi( n-1,s,6-s-d );
    System.out.println( "Da "+s+" a "+d );
    risolviHanoi( n-1,6-s-d,d );
  }
}
```

  - Termina
    - A ogni nuova esecuzione il numero di dischi è diminuito di 1
  - Quanti passi esegue?

Numero di mosse

- Se $n = 1$: 1
- Se $n = 2$: 3
- Se $n = 3$: 7
- Se $n = 4$: 15
- Se $n = 5$: 31
- In generale: $2^n - 1$
- Dimostrazione
  - Caso base $n = 1$: $2^1 - 1 = 1$
  - Passo induttivo: $(2^{n-1} - 1) + 1 + (2^{n-1} - 1) = 2^n - 1$
- 1 mossa/sec: circa 585 miliardi di anni!

Generazione di sequenze binarie e di permutazioni

- Sequenza binaria equivalente a sottoinsieme di n elementi
- Metodo ricorsivo
  - Pone bit in posizione b a 0
  - Genera tutte le sequenze con tale bit (ricorsivamente)
  - Pone bit in posizione b a 1
  - Genera tutte le sequenze con tale bit (ricorsivamente)

```
void generaBinarie( int[] a, int b ) {
  if (b==0) {
    stampaArray( a );
  } else {
    a[b-1] = 0;
    generaBinarie( a, b-1 );
    a[b-1] = 1;
    generaBinarie( a, b-1 );
  }
}
```

- Generazione ricorsiva di permutazioni
  - Ciascuno elemento occupa ultima posizione
  - Rimanenti elementi ricorsivamente permutati

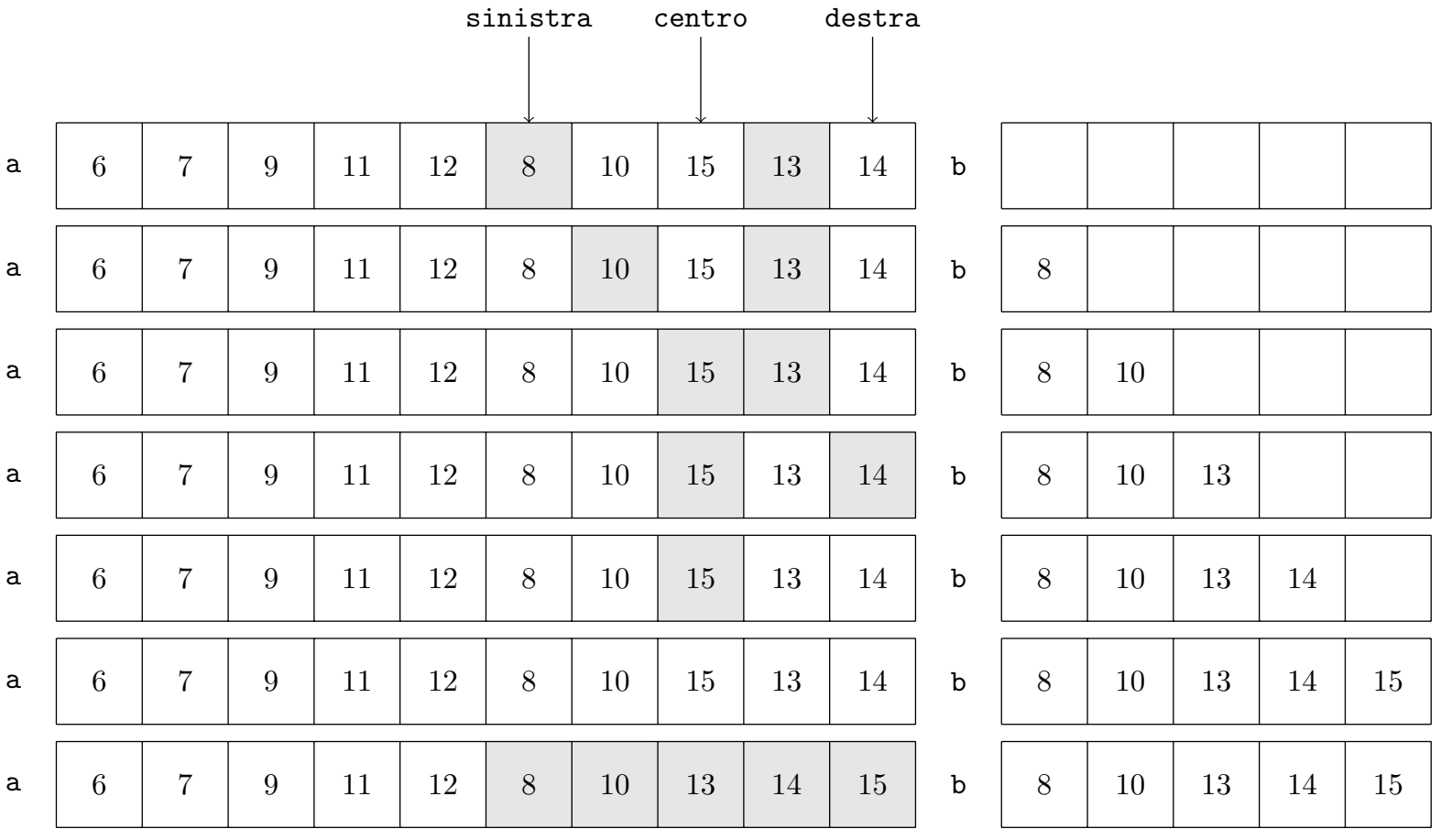
```
void generaPermutazioni(char[] a, int p) {
  char temp;
  if (p==0) {
    stampaArray( a );
  } else {
    for (int i = p-1; i>=0; i--) {
      temp = a[i];
      a[i] = a[p-1];
      a[p-1] = temp;
      generaPermutazioni( a, p-1 );
      temp = a[i];
      a[i] = a[p-1];
      a[p-1] = temp;
    }
  }
}
```

Ricorsione e divide-et-impera

- Ordinamento per fusione
  1. Decomposizione in sotto-problemi: se almeno due elementi, divide in due sotto-array uguali
  2. Soluzione ricorsiva: ordina ricorsivamente due sotto-array
  3. Ricombinazione delle soluzioni: fonde due sotto-array ordinati in un array ordinato
- Implementazione

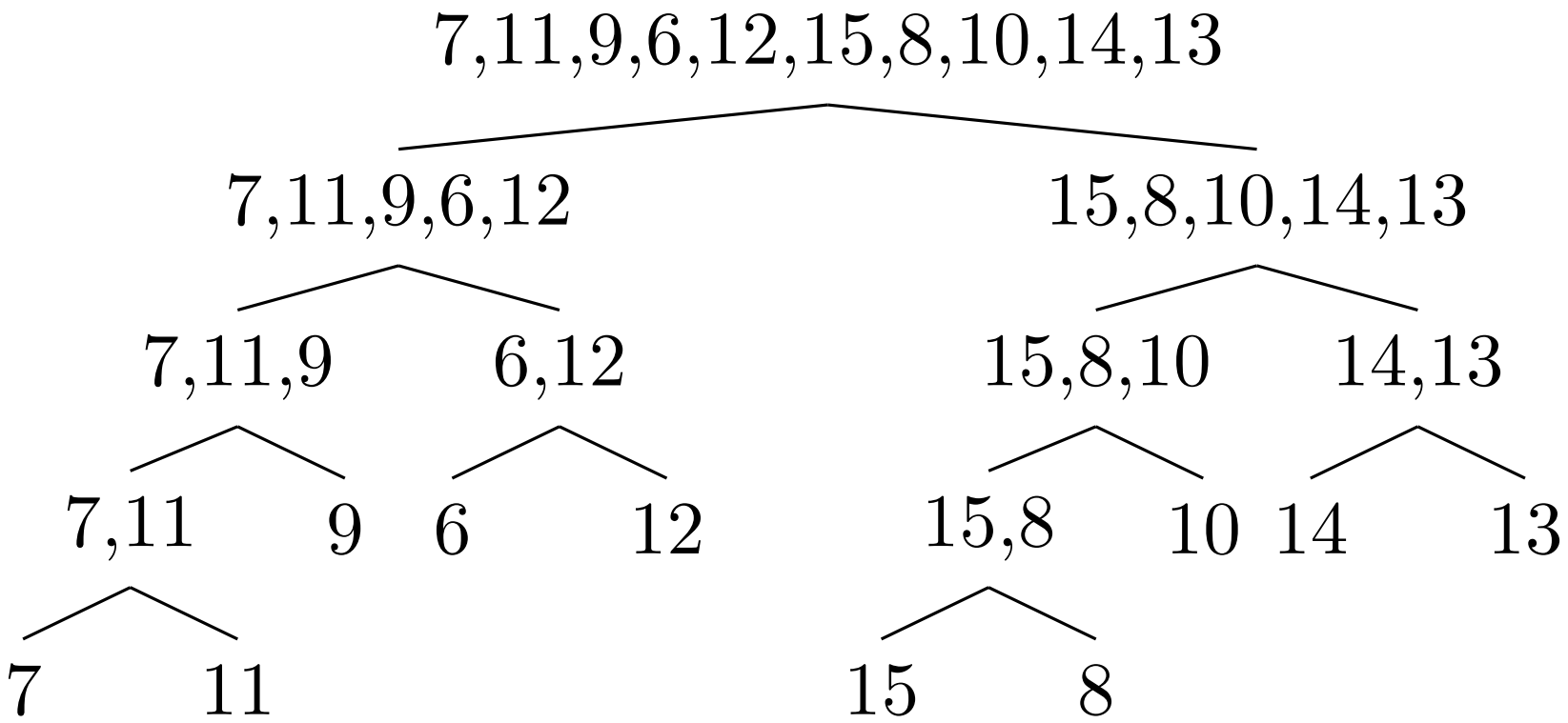
```
void ordina( int[] a, int sinistra, int destra) {
  if (sinistra < destra) {
    int centro = (sinistra + destra) / 2;
    ordina(a,sinistra, centro);
    ordina(a,centro + 1, destra);
    fondi(a,sinistra, centro, destra);
  }
}
```

- Fusione con array di appoggio



```
void fondi(int[] a, int s, int c, int d) {
  int[] b = new int[d-s+1];
  int i = s, j = c + 1, k = 0;
  while ((i <= c) && (j <= d)) {
    if (a[i]<a[j]) {
      b[k] = a[i]; i = i + 1; k = k + 1;
    } else {
      b[k] = a[j]; j = j + 1; k = k + 1;
    }
  }
  while (i <= c) {
    b[k] = a[i]; i = i + 1; k = k + 1;
  }
  while (j <= d) {
    b[k] = a[j]; j = j + 1; k = k + 1;
  }
  for (i = s; i <= d; i = i + 1) a[i] = b[i-s];
}
```

- Albero delle chiamate ricorsive



Il gioco del Sudoku

- Tabella 9×9 contenente numeri compresi tra 1 e 9
- Divisa in 3×3 sottotabelle (di taglia 3×3)
- Alcune celle contengono numeri, altre vuote
- Riempire le celle vuote in modo che
  - Ogni riga contiene una permutazione di $1, 2, \ldots, 9$
  - Ogni colonna contiene una permutazione di $1, 2, \ldots, 9$
  - Ogni sottotabella contiene una permutazione di $1, 2, \ldots, 9$
- Esempio

3	9							8
	7	1			3			
		8		4	9		6	
1			2	7				9
6								3
5				3	6			4
	4		1	5		9		
			9			8	2	
9							4	7

3	9	6	5	1	2	4	7	8
4	7	1	6	8	3	5	9	2
2	5	8	7	4	9	3	6	1
1	3	4	2	7	5	6	8	9
6	8	7	4	9	1	2	5	3
5	2	9	8	3	6	7	1	4
8	4	2	1	5	7	9	3	6
7	1	3	9	6	4	8	2	5
9	6	5	3	2	8	1	4	7

  - Soluzione ottenibile attraverso implicazioni logiche
  - Ad esempio, nella sottotabella in alto a destra il 3 può stare solo in basso a sinistra

			6		2		9	
								6
			7	3	1	5		8
4		9	3			6		5
		3				1		
5		8			7	9		2
		1	5	2	3			
7								
	6	2	9		4			

			6		2		9	
			8					6
			7	3	1	5		8
4	2	9	3	1	8	6	7	5
6	7	3	2			1	8	4
5	1	8	4	6	7	9	3	2
		1	5	2	3			
7			1	8	6			
	6	2	9	7	4			

- Partendo dalla configurazione a sinistra, giungiamo nella configurazione a destra che ammette diverse scelte per ogni casella
- **Backtrack**: *algoritmo che esplora tali scelte, annullando gli effetti nel caso che non conducano a soluzione*

- Algoritmo di backtrack
  1. Cerca prima casella vuota c
  2. Determina cifre possibili per c: prova ad assegnare a c una dopo l'altra tali cifre
  3. Se ultima casella, restituisce configurazione finale (soluzione trovata)
  4. Altrimenti, procede ricorsivamente con prossima casella vuota
     - Se non produce soluzione accettabile, annulla scelta fatta e prova successiva (procedimento termina se finite le scelte possibili)

- Prossima cella vuota
  - Cella identificata da array di sue coordinate

```
int[] prossimaCasella( int[] c,int[][] s ) {
  for (int j = c[1] + 1; j < s.length; j++) {
    if (s[c[0]][j] == 0) {
      return new int[] { c[0], j };
    }
  }
  for (int i = c[0] + 1; i < s.length; i++) {
    for (int j = 0; j < s.length; j++) {
      if (s[i][j] == 0) {
        return new int[] { i, j };
      }
    }
  }
  return new int[] { -1, -1 };
}
```

- Decidere se cifra compatibile con cella
  - n: radice quadrata dimensione tabella

```
boolean accettabile(int d,int[] c,int n,int[][] s){
  for (int i = 0; i < n * n; i++)
    if (s[c[0]][i] == d) return false;
  for (int i = 0; i < n * n; i++)
    if (s[i][c[1]] == d) return false;
  int fr = (c[0] / n) * n;
  int fc = (c[1] / n) * n;
  for (int i = fr; i < fr + n; i++) {
    for (int j = fc; j < fc + n; j++) {
      if (s[i][j] == d) {
        return false;
      }
    }
  }
  return true;
}
```

- Determinare cifre posizionabili in cella
  - Usa `accettabile`

```
boolean[] cifreAmmissibili(int[] c,int n,int[][] s){
  boolean[] r = new boolean[n * n];
  for (int d = 1; d <= n * n; d++) {
    r[d - 1] = accettabile(d, c, n, s);
  }
  return r;
}
```

- Risolvere il Sudoku
  - Ricorsivo
  - Usa `cifreAmmissibili` e `prossimaCasella`

```
boolean risolvibile(int[] c, int n, int[][] s) {
  boolean[] a = cifreAmmissibili(c, n, s);
  for (int d = 1; d <= n*n; d++) {
    if (a[d-1]) {
      s[c[0]][c[1]] = d;
      int[] nc = prossimaCasella(c, s);
      if (nc[0] >= 0 && !risolvibile(nc, n, s)) {
        s[c[0]][c[1]] = 0;
      } else {
        return true;
      }
    }
  }
  return false;
}
```

- Il metodo principale

```
void main() {
  int[][] s = { { 4, 2, 0, 0 }, { 0, 0, 0, 3 },
    { 0, 1, 3, 0 },{ 0, 0, 0, 2 } };
  int n = 2;
  stampaMatrice( s );
  int[] p = prossimaCasella(new int[] { 0, -1 }, s);
  System.out.println(risolvibile(p, n, s));
  stampaMatrice( s );
}
void stampaMatrice(int[][] s) {
  for (int i = 0; i < s.length; i++) {
    for (int j = 0; j < s.length; j++) {
      System.out.print(s[i][j] + " ");
    }
   System.out.println();
  }
}
```

- Schema del programma