

# Programmazione

– Calcolatori e programmi –

Francesco Tiezzi



Scuola di Scienze e Tecnologie

Sezione di Informatica

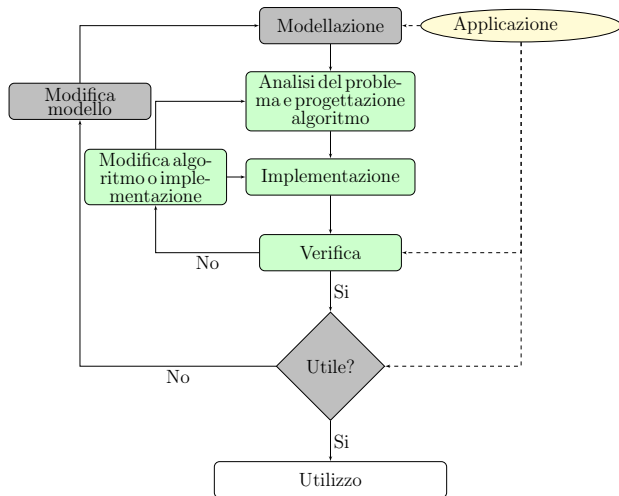
Università di Camerino

Lucidi originali di Pierluigi Crescenzi

## Cosa è l'informatica?

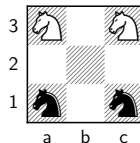
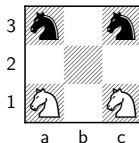
- ▶ Più facile dire cosa non è
  - ▶ Poco a vedere con “alfabetizzazione informatica” (saper usare un computer per scrivere un testo o navigare in Internet)
  - ▶ Non consiste semplicemente nello scrivere programmi
- ▶ Denning et al (1989)
  - ▶ *L'informatica è lo studio sistematico dei processi algoritmici che descrivono e trasformano l'informazione: la loro teoria, analisi, progettazione, efficienza, implementazione e applicazione*
  - ▶ Domanda fondamentale
    - ▶ *Che cosa può essere (efficientemente) automatizzato?*
- ▶ Metodo algoritmico
  - ▶ Formulare algoritmi che risolvano un problema
  - ▶ Trasformare questi algoritmi in programmi
  - ▶ Verificare la correttezza e l'efficacia di tali programmi analizzandoli ed eseguendoli

## Il metodo algoritmico

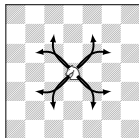


## Il metodo algoritmico: trovare il giusto modello

- Qual è la sequenza di mosse più breve che consente ai cavalli di passare dalla configurazione a sinistra a quella a destra?

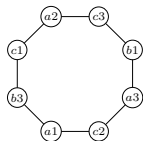
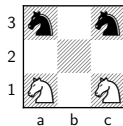


- Possibili mosse del cavallo



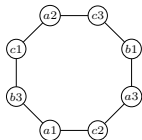
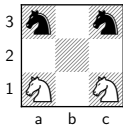
## Il modello

- Rappresentare il problema mediante una relazione di raggiungibilità

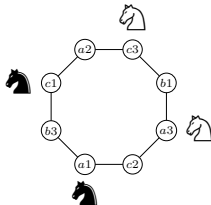
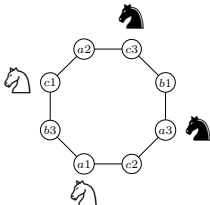


## Il modello

- ▶ Rappresentare il problema mediante una relazione di raggiungibilità

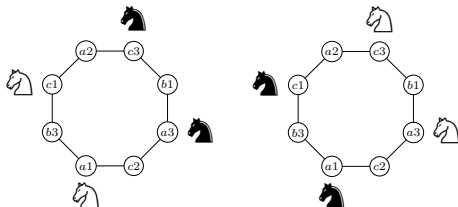


- ▶ Il problema diventa: trovare il minimo numero di mosse per andare dalla configurazione a sinistra a quella a destra



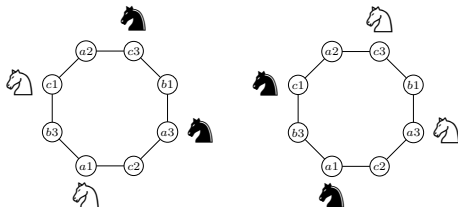
## La soluzione: algoritmo

- Trovare il minimo numero di mosse per andare dalla configurazione a sinistra a quella a destra



## La soluzione: algoritmo

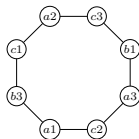
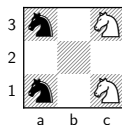
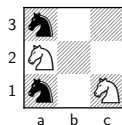
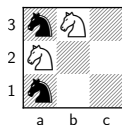
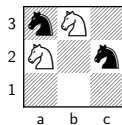
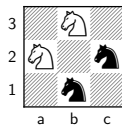
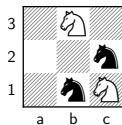
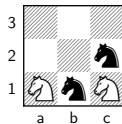
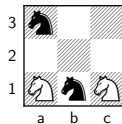
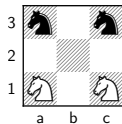
- ▶ Trovare il minimo numero di mosse per andare dalla configurazione a sinistra a quella a destra



- ▶ Ruotare i cavalli di quattro posizioni in senso orario (o antiorario)



## La soluzione: le prime 8 mosse

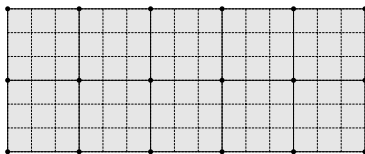


## Il metodo algoritmico: trovare il giusto algoritmo

### ► Problema

- Piastrellare una stanza rettangolare di dimensione  $n \times m$  con il minor numero possibile di mattonelle quadrate di uguale dimensione

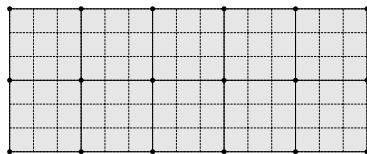
- Esempio:  $n = 6$  e  $m = 15$



## Il metodo algoritmico: trovare il giusto algoritmo

### ► Problema

- Piastrellare una stanza rettangolare di dimensione  $n \times m$  con il minor numero possibile di mattonelle quadrate di uguale dimensione
  - Esempio:  $n = 6$  e  $m = 15$



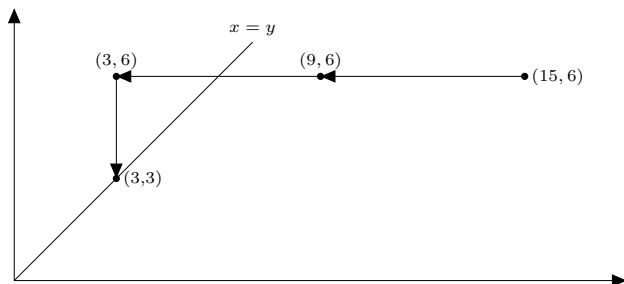
### ► Modello

- Determinare il massimo numero intero che divide sia  $n$  che  $m$
- Calcolare il *massimo comun divisore* (MCD) di  $n$  e  $m$ 
  - $MCD(6, 15) = 3$

- ▶ Primo algoritmo basato su definizione
  - ▶ Supponiamo che  $n < m$  e che  $n$  non divide  $m$
  - ▶ Esaminiamo tutti i numeri  $d$  tra  $n/2$  e 2 (in ordine inverso)
    - ▶ Se  $d$  divide  $n$  e divide  $m$ , allora  $MCD(n, m) = d$
  - ▶  $MCD(n, m) = 1$
- ▶ Esempio:  $n = 111$  e  $m = 259$ 
  - ▶  $n/2 = 55$
  - ▶ Tutti i numeri tra 55 e 37 non dividono 111
  - ▶ 37 divide  $111 = 37 \times 3$  e divide  $259 = 37 \times 7$
  - ▶  $MCD(111, 259) = 37$

- ▶ Primo algoritmo basato su definizione
  - ▶ Supponiamo che  $n < m$  e che  $n$  non divide  $m$
  - ▶ Esaminiamo tutti i numeri  $d$  tra  $n/2$  e 2 (in ordine inverso)
    - ▶ Se  $d$  divide  $n$  e divide  $m$ , allora  $MCD(n, m) = d$
  - ▶  $MCD(n, m) = 1$
- ▶ Esempio:  $n = 111$  e  $m = 259$ 
  - ▶  $n/2 = 55$
  - ▶ Tutti i numeri tra 55 e 37 non dividono 111
  - ▶ 37 divide  $111 = 37 \times 3$  e divide  $259 = 37 \times 7$
  - ▶  $MCD(111, 259) = 37$
- ▶ Caso pessimo
  - ▶  $MCD(n, m) = 1$ 
    - ▶ Bisogna provare tutti i numeri tra  $n/2$  e 2

► Secondo algoritmo: formulazione geometrica



- ▶ Secondo algoritmo: formulazione algoritmica
  - ▶ Fintanto che  $n \neq m$ , se  $n < m$  poni  $m$  uguale a  $m - n$ , altrimenti poni  $n$  uguale a  $n - m$
  - ▶ Quando  $n = m$ , il loro valore è il MCD
- ▶ Correttezza
  - ▶ Segue dal fatto che, se  $x > y$ ,  $MCD(x, y) = MCD(x - y, y)$ 
    - ▶ Ogni numero che divide sia  $x$  che  $y$ , divide  $x - y$
    - ▶ Ogni numero che divide sia  $x - y$  che  $y$ , divide  $x$

- ▶ Secondo algoritmo: formulazione algoritmica
  - ▶ Fintanto che  $n \neq m$ , se  $n < m$  poni  $m$  uguale a  $m - n$ , altrimenti poni  $n$  uguale a  $n - m$
  - ▶ Quando  $n = m$ , il loro valore è il MCD
- ▶ Correttezza
  - ▶ Segue dal fatto che, se  $x > y$ ,  $MCD(x, y) = MCD(x - y, y)$ 
    - ▶ Ogni numero che divide sia  $x$  che  $y$ , divide  $x - y$
    - ▶ Ogni numero che divide sia  $x - y$  che  $y$ , divide  $x$
- ▶ Caso pessimo
  - ▶  $n$  molto grande e  $m$  molto piccolo
  - ▶ Non molto diverso dal primo algoritmo



## Algoritmo di Euclide

- ▶ Miglioramento rispetto al secondo algoritmo
  - ▶ Cercare di raggiungere un punto sull'asse delle ascisse, saltando direttamente al punto a esso più vicino

## Algoritmo di Euclide

- ▶ Miglioramento rispetto al secondo algoritmo
  - ▶ Cercare di raggiungere un punto sull'asse delle ascisse, saltando direttamente al punto a esso più vicino
  - ▶ Fintanto che  $n \neq 0$  e  $m \neq 0$ , se  $n < m$  passa alla coppia  $(n, m \bmod n)$ , altrimenti passa alla coppia  $(m, n \bmod m)$ 
    - ▶  $x \bmod y$ : resto della divisione di  $x$  per  $y$

## Algoritmo di Euclide

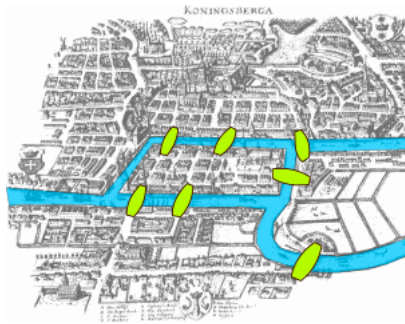
- ▶ Miglioramento rispetto al secondo algoritmo
  - ▶ Cercare di raggiungere un punto sull'asse delle ascisse, saltando direttamente al punto a esso più vicino
  - ▶ Fintanto che  $n \neq 0$  e  $m \neq 0$ , se  $n < m$  passa alla coppia  $(n, m \bmod n)$ , altrimenti passa alla coppia  $(m, n \bmod m)$ 
    - ▶  $x \bmod y$ : resto della divisione di  $x$  per  $y$
- ▶ Correttezza
  - ▶ Segue dal fatto che, se  $x > y$ ,  $MCD(x, y) = MCD(y, x \bmod y)$ 
    - ▶ Se  $r = x \bmod y$ , allora  $x = qy + r$  e  $r = x - qy$
    - ▶ Ogni numero che divide sia  $x$  che  $y$ , divide  $r$
    - ▶ Ogni numero che divide sia  $y$  che  $r$ , divide  $x$

## Algoritmo di Euclide

- ▶ Miglioramento rispetto al secondo algoritmo
  - ▶ Cercare di raggiungere un punto sull'asse delle ascisse, saltando direttamente al punto a esso più vicino
  - ▶ Fintanto che  $n \neq 0$  e  $m \neq 0$ , se  $n < m$  passa alla coppia  $(n, m \bmod n)$ , altrimenti passa alla coppia  $(m, n \bmod m)$ 
    - ▶  $x \bmod y$ : resto della divisione di  $x$  per  $y$
- ▶ Correttezza
  - ▶ Segue dal fatto che, se  $x > y$ ,  $MCD(x, y) = MCD(y, x \bmod y)$ 
    - ▶ Se  $r = x \bmod y$ , allora  $x = qy + r$  e  $r = x - qy$
    - ▶ Ogni numero che divide sia  $x$  che  $y$ , divide  $r$
    - ▶ Ogni numero che divide sia  $y$  che  $r$ , divide  $x$
- ▶ Efficienza
  - ▶ Ottimale (ma esula da questo corso)

## Il metodo algoritmico: un esempio più complesso

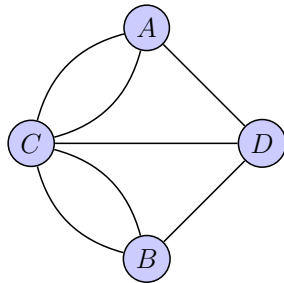
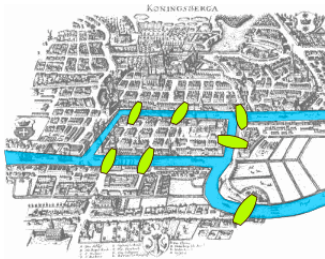
- ▶ Il problema dei ponti di Königsberg



- ▶ Possibile con una passeggiata seguire un percorso che attraversi ogni ponte una e una volta soltanto e tornare al punto di partenza?

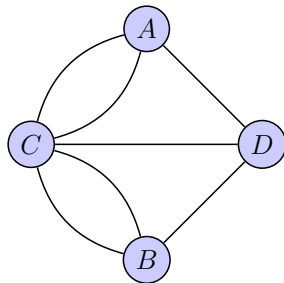
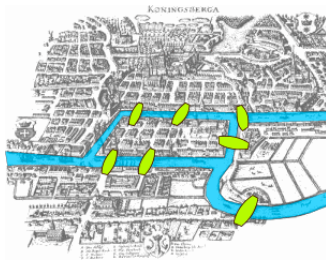
## Il modello

- ▶ Rappresentare relazione di connessione
  - ▶ Multigrafo



## Il modello

- ▶ Rappresentare relazione di connessione
  - ▶ Multigrafo



- ▶ Esiste un circuito che attraversa ogni arco una e una sola volta?
  - ▶ Esiste un circuito Euleriano?

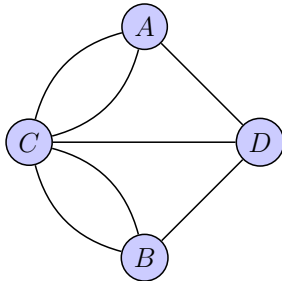
## Teorema di Eulero

- ▶ Esiste un circuito Euleriano se e solo se il multigrafo è connesso e ogni nodo ha grado pari
  - ▶ Grafo connesso: ogni nodo può raggiungere ogni altro nodo
  - ▶ Grado di un nodo: numero di archi incidenti



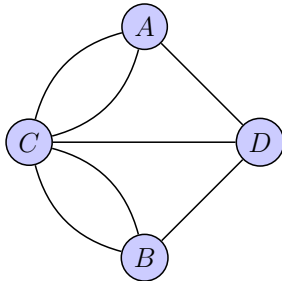
## Teorema di Eulero

- ▶ Esiste un circuito Euleriano se e solo se il multigrafo è connesso e ogni nodo ha grado pari
  - ▶ Grafo connesso: ogni nodo può raggiungere ogni altro nodo
  - ▶ Grado di un nodo: numero di archi incidenti
- ▶ Multigrafo di Königsberg non ha circuito Euleriano



## Teorema di Eulero

- ▶ Esiste un circuito Euleriano se e solo se il multigrafo è connesso e ogni nodo ha grado pari
  - ▶ Grafo connesso: ogni nodo può raggiungere ogni altro nodo
  - ▶ Grado di un nodo: numero di archi incidenti
- ▶ Multigrafo di Königsberg non ha circuito Euleriano

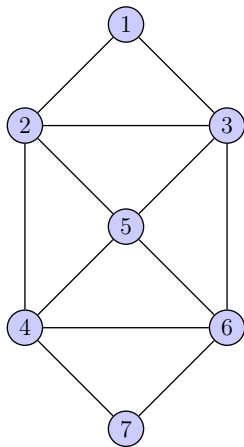


- ▶ Inizio della teoria dei grafi

# Algoritmo

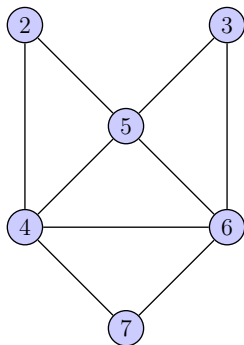
- ▶ Si parte da un vertice arbitrario e si percorre il grafo cancellando gli archi percorsi
  - ▶ Raggiunto un vertice si riparte da questo
- ▶ Il vertice iniziale diventa di grado 1 mentre i vertici successivamente toccati hanno il grado diminuito di 2 (cancellati o ancora pari)
- ▶ Archi e vertici sono finiti e si ritorna al vertice di partenza (unico dispari)
  - ▶ Si determina così un ciclo
- ▶ Si ripete fino a che possibile
  - ▶ Si cancellano dal grafo gli archi del ciclo, e se esistono ancora archi si sceglie un vertice del ciclo e si ripete il procedimento
  - ▶ Si determina un nuovo ciclo che si inserisce sul ciclo precedente

## Esempio



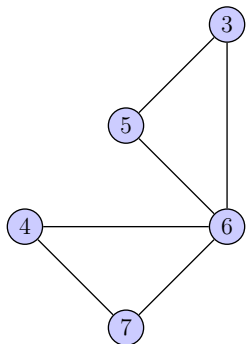
- ▶ Scegliendo sempre il vertice di indice più basso
  - ▶ Ciclo 1-2-3-1

## Esempio



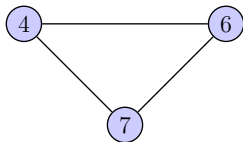
- ▶ Scegliendo sempre il vertice di indice più basso
  - ▶ Ciclo 1-2-3-1
  - ▶ Ciclo 2-4-5-2
    - ▶ Ciclo complessivo 1-2-4-5-2-3-1

## Esempio



- ▶ Scegliendo sempre il vertice di indice più basso
  - ▶ Ciclo 1-2-3-1
  - ▶ Ciclo 2-4-5-2
    - ▶ Ciclo complessivo 1-2-4-5-2-3-1
  - ▶ Ciclo 3-5-6-3
    - ▶ Ciclo complessivo 1-2-4-5-2-3-5-6-3-1

## Esempio



- ▶ Scegliendo sempre il vertice di indice più basso
  - ▶ Ciclo 1-2-3-1
  - ▶ Ciclo 2-4-5-2
    - ▶ Ciclo complessivo 1-2-4-5-2-3-1
  - ▶ Ciclo 3-5-6-3
    - ▶ Ciclo complessivo 1-2-4-5-2-3-5-6-3-1
  - ▶ Ciclo 4-6-7-4
    - ▶ Ciclo complessivo (e finale)  
1-2-4-6-7-4-5-2-3-5-6-3-1

# Algoritmi

- ▶ **Informatica**: studio sistematico dei processi algoritmici che descrivono e trasformano l'informazione: la loro teoria, analisi, progettazione, efficienza, implementazione e applicazione
- ▶ **Algoritmo**: successione finita di istruzioni o passi che definiscono le operazioni da eseguire su dei dati (che formano l'istanza di un problema) per ottenere dei risultati (intesi come la soluzione dell'istanza specificata)
  - ▶ Proprietà
    - ▶ Finito
    - ▶ Generale
    - ▶ Non ambiguo
    - ▶ Corretto
    - ▶ Efficiente
  - ▶ Esempio
    - ▶ Algoritmo di Euclide



## Problemi indecidibili

- ▶ Non tutti i problemi (computazionali) ammettono algoritmi di risoluzione: **problema della fermata** (Turing, 1937)

Dato un generico algoritmo (o programma)  $A$  e dato un input  $x$ ,  $A$  con  $x$  in ingresso **termina** o **va in ciclo**?

## Problemi indecidibili

- ▶ Non tutti i problemi (computazionali) ammettono algoritmi di risoluzione: **problema della fermata** (Turing, 1937)

Dato un generico algoritmo (o programma)  $A$  e dato un input  $x$ ,  $A$  con  $x$  in ingresso **termina** o **va in ciclo**?

- ▶ Esempio: algoritmo  $P$ 
  - ▶ Con input  $n$ 
    1. Pone  $f = 2$
    2. Fintanto che  $f < n$  e  $n \bmod f$  è diverso da 0, aumenta  $f$  di 1
    3. Se  $f = n$ , allora il numero è primo, altrimenti non lo è
  - ▶ Per un numero  $n$  qualsiasi,  $P(n)$  termina?

## Problemi indecidibili

- ▶ Non tutti i problemi (computazionali) ammettono algoritmi di risoluzione: **problema della fermata** (Turing, 1937)

Dato un generico algoritmo (o programma)  $A$  e dato un input  $x$ ,  $A$  con  $x$  in ingresso **termina** o **va in ciclo**?

- ▶ Esempio: algoritmo  $P$ 
  - ▶ Con input  $n$ 
    1. Pone  $f = 2$
    2. Fintanto che  $f < n$  e  $n \bmod f$  è diverso da 0, aumenta  $f$  di 1
    3. Se  $f = n$ , allora il numero è primo, altrimenti non lo è
  - ▶ Per un numero  $n$  qualsiasi,  $P(n)$  termina?
    - ▶ Sì, perché  $f$  è aumentato di 1 a ogni ripetizione del passo 2 e a un certo punto deve divenire uguale a  $n$

## Conggettura di Goldbach

- ▶ Formulata nel 1742
  - ▶ Ogni numero pari  $n \geq 4$  è uguale alla somma di due numeri primi

## Conggettura di Goldbach

- ▶ Formulata nel 1742
  - ▶ Ogni numero pari  $n \geq 4$  è uguale alla somma di due numeri primi
- ▶ Esempio: algoritmo G
  - ▶ Senza nessun input
    1. Pone  $n = 2$
    2. Aumenta  $n$  di 2
    3. Per ogni  $p$  con  $2 \leq p < n$  e  $q = n - p$ : se  $p$  e  $q$  sono primi vai al passo 2.
    4. La congettura è falsa
  - ▶ Quest'algoritmo termina?

## Conggettura di Goldbach

- ▶ Formulata nel 1742
  - ▶ Ogni numero pari  $n \geq 4$  è uguale alla somma di due numeri primi
- ▶ Esempio: algoritmo G
  - ▶ Senza nessun input
    1. Pone  $n = 2$
    2. Aumenta  $n$  di 2
    3. Per ogni  $p$  con  $2 \leq p < n$  e  $q = n - p$ : se  $p$  e  $q$  sono primi vai al passo 2.
    4. La congettura è falsa
- ▶ Quest'algoritmo termina?
  - ▶ Termina se e solo se trova  $n \geq 4$  per cui non esistono due primi  $p$  e  $q$  t.c.  $n = p + q$
  - ▶ Termina se e solo se la congettura di Goldbach è falsa (problema aperto)

## Problema della fermata

- ▶ Un algoritmo è una sequenza di simboli
  - ▶ Un algoritmo può essere dato in pasto a un altro algoritmo

## Problema della fermata

- ▶ Un algoritmo è una sequenza di simboli
  - ▶ Un algoritmo può essere dato in pasto a un altro algoritmo
- ▶ Supponiamo esista un algoritmo  $T(A, x)$  che, in tempo finito, risponde SI se  $A(x)$  termina, risponde NO se va in ciclo
  - ▶ È legale invocare  $T(A, A)$
- ▶ Esempio: algoritmo F
  - ▶ Con input A
    1. Se  $T(A, A)$  risponde SI allora va in ciclo, altrimenti termina
- ▶  $F(F)$  termina?



## Problema della fermata

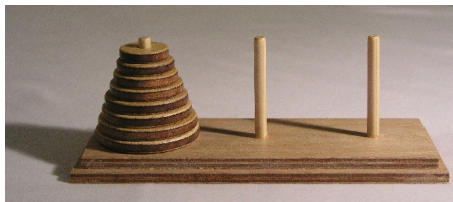
- ▶ Un algoritmo è una sequenza di simboli
  - ▶ Un algoritmo può essere dato in pasto a un altro algoritmo
- ▶ Supponiamo esista un algoritmo  $T(A, x)$  che, in tempo finito, risponde SI se  $A(x)$  termina, risponde NO se va in ciclo
  - ▶ È legale invocare  $T(A, A)$
- ▶ Esempio: algoritmo F
  - ▶ Con input  $A$ 
    1. Se  $T(A, A)$  risponde SI allora va in ciclo, altrimenti termina
- ▶  $F(F)$  termina?
  - ▶ Se  $F(F)$  termina, allora  $T(F, F)$  risponde NO, ovvero  $F(F)$  non termina
  - ▶ Se  $F(F)$  non termina, allora  $T(F, F)$  risponde SI, ovvero  $F(F)$  termina
  - ▶ **Contraddizione**

## Problema della fermata

- ▶ Un algoritmo è una sequenza di simboli
  - ▶ Un algoritmo può essere dato in pasto a un altro algoritmo
- ▶ Supponiamo esista un algoritmo  $T(A, x)$  che, in tempo finito, risponde SI se  $A(x)$  termina, risponde NO se va in ciclo
  - ▶ È legale invocare  $T(A, A)$
- ▶ Esempio: algoritmo F
  - ▶ Con input A
    1. Se  $T(A, A)$  risponde SI allora va in ciclo, altrimenti termina
- ▶  $F(F)$  termina?
  - ▶ Se  $F(F)$  termina, allora  $T(F, F)$  risponde NO, ovvero  $F(F)$  non termina
  - ▶ Se  $F(F)$  non termina, allora  $T(F, F)$  risponde SI, ovvero  $F(F)$  termina
  - ▶ **Contraddizione**
- ▶ Il problema della fermata è **indecidibile**
- ▶ Altri problemi lo sono: stabilire equivalenza tra 2 programmi

## Torri di Hanoi

- ▶ 3 pioli
- ▶  $n = 64$  dischi sul primo piolo (vuoti gli altri due)
- ▶ Ogni mossa sposta un disco in cima a un piolo
- ▶ Un disco non può poggiare su uno più piccolo
- ▶ Spostare tutti i dischi dal primo al terzo piolo
  - ▶ Leggenda: finito lo spostamento, il mondo scomparirà



## Torri di Hanoi

- ▶ 3 pioli
- ▶  $n = 64$  dischi sul primo piolo (vuoti gli altri due)
- ▶ Ogni mossa sposta un disco in cima a un piolo
- ▶ Un disco non può poggiare su uno più piccolo
- ▶ Spostare tutti i dischi dal primo al terzo piolo
  - ▶ Leggenda: finito lo spostamento, il mondo scomparirà
- ▶ Algoritmo H con input  $n, p, s, t$ 
  1. Se  $n = 1$  sposta il disco da  $p$  a  $t$
  2. Altrimenti
    - 2.1 Esegue  $H(n - 1, p, t, s)$
    - 2.2 Sposta un disco da  $p$  a  $t$
    - 2.3 Esegue  $H(n - 1, s, p, t)$

## Torri di Hanoi

- ▶ 3 pioli
- ▶  $n = 64$  dischi sul primo piolo (vuoti gli altri due)
- ▶ Ogni mossa sposta un disco in cima a un piolo
- ▶ Un disco non può poggiare su uno più piccolo
- ▶ Spostare tutti i dischi dal primo al terzo piolo
  - ▶ Leggenda: finito lo spostamento, il mondo scomparirà
- ▶ Algoritmo  $H$  con input  $n, p, s, t$ 
  1. Se  $n = 1$  sposta il disco da  $p$  a  $t$
  2. Altrimenti
    - 2.1 Esegue  $H(n - 1, p, t, s)$
    - 2.2 Sposta un disco da  $p$  a  $t$
    - 2.3 Esegue  $H(n - 1, s, p, t)$
  - ▶ Termina
    - ▶ A ogni nuova esecuzione il numero di dischi è diminuito di 1
  - ▶ Quanti passi esegue?

## Numero di mosse

- ▶ Se  $n = 1$ : 1

## Numero di mosse

- ▶ Se  $n = 1$ : 1
- ▶ Se  $n = 2$ : 3

## Numero di mosse

- ▶ Se  $n = 1$ : 1
- ▶ Se  $n = 2$ : 3
- ▶ Se  $n = 3$ : 7



## Numero di mosse

- ▶ Se  $n = 1$ : 1
- ▶ Se  $n = 2$ : 3
- ▶ Se  $n = 3$ : 7
- ▶ Se  $n = 4$ : 15

## Numero di mosse

- ▶ Se  $n = 1$ : 1
- ▶ Se  $n = 2$ : 3
- ▶ Se  $n = 3$ : 7
- ▶ Se  $n = 4$ : 15
- ▶ Se  $n = 5$ : 31

## Numero di mosse

- ▶ Se  $n = 1$ : 1
- ▶ Se  $n = 2$ : 3
- ▶ Se  $n = 3$ : 7
- ▶ Se  $n = 4$ : 15
- ▶ Se  $n = 5$ : 31
- ▶ In generale:  $2^n - 1$

## Numero di mosse

- ▶ Se  $n = 1$ : 1
- ▶ Se  $n = 2$ : 3
- ▶ Se  $n = 3$ : 7
- ▶ Se  $n = 4$ : 15
- ▶ Se  $n = 5$ : 31
- ▶ In generale:  $2^n - 1$
- ▶ Dimostrazione
  - ▶ Caso base  $n = 1$ :  $2^1 - 1 = 1$
  - ▶ Passo induttivo:  $(2^{n-1} - 1) + 1 + (2^{n-1} - 1) = 2^n - 1$

## Numero di mosse

- ▶ Se  $n = 1$ : 1
- ▶ Se  $n = 2$ : 3
- ▶ Se  $n = 3$ : 7
- ▶ Se  $n = 4$ : 15
- ▶ Se  $n = 5$ : 31
- ▶ In generale:  $2^n - 1$
- ▶ Dimostrazione
  - ▶ Caso base  $n = 1$ :  $2^1 - 1 = 1$
  - ▶ Passo induttivo:  $(2^{n-1} - 1) + 1 + (2^{n-1} - 1) = 2^n - 1$
- ▶ 1 mossa/sec: circa 585 miliardi di anni!

## Tempo esponenziale $2^n - 1$

- ▶ 1 operazione/sec

|       |      |      |     |      |     |      |        |         |
|-------|------|------|-----|------|-----|------|--------|---------|
| n     | 5    | 10   | 15  | 20   | 25  | 30   | 35     | 40      |
| tempo | 31 s | 17 m | 9 h | 12 g | 1 a | 34 a | 1089 a | 34865 a |

- ▶ Aumentare di un fattore **moltiplicativo**  $X$   
(ossia  $X$  operazioni/sec) migliora **solo** di un fattore **additivo**
  - ▶ Tempo: circa  $2^{n-\log_2 X}$ 
    - ▶ Solo  $\log_2 X$  dischi in più rispetto a 1 operazione/sec

## Tempo esponenziale $2^n - 1$

- ▶ 1 operazione/sec

|       |      |      |     |      |     |      |        |         |
|-------|------|------|-----|------|-----|------|--------|---------|
| n     | 5    | 10   | 15  | 20   | 25  | 30   | 35     | 40      |
| tempo | 31 s | 17 m | 9 h | 12 g | 1 a | 34 a | 1089 a | 34865 a |

- ▶ Aumentare di un fattore **moltiplicativo**  $X$   
(ossia  $X$  operazioni/sec) migliora **solo** di un fattore **additivo**
  - ▶ Tempo: circa  $2^{n - \log_2 X}$ 
    - ▶ Solo  $\log_2 X$  dischi in più rispetto a 1 operazione/sec
- ▶ Per quanto la tecnologia possa migliorare, la fine del mondo è lontana...

## Ordinamento

*Data una sequenza di  $n$  elementi e una loro relazione d'ordine  $\leq$ ,  
disporli in modo che risultino ordinati (per esempio, in modo  
crescente) secondo la relazione  $\leq$*

- ▶ Milioni di applicazioni



## Ordinamento

*Data una sequenza di  $n$  elementi e una loro relazione d'ordine  $\leq$ , disporli in modo che risultino ordinati (per esempio, in modo crescente) secondo la relazione  $\leq$*

- ▶ Milioni di applicazioni
- ▶ Algoritmo di ordinamento per selezione
  - ▶ Esegue  $n$  passi
  - ▶ Passo  $i$ : **seleziona** il minimo tra i rimanenti  $n - i + 1$  elementi e lo mette in posizione  $i$

## Ordinamento

*Data una sequenza di  $n$  elementi e una loro relazione d'ordine  $\leq$ , disporli in modo che risultino ordinati (per esempio, in modo crescente) secondo la relazione  $\leq$*

- ▶ Milioni di applicazioni
- ▶ Algoritmo di ordinamento per selezione
  - ▶ Esegue  $n$  passi
  - ▶ Passo  $i$ : **seleziona** il minimo tra i rimanenti  $n - i + 1$  elementi e lo mette in posizione  $i$
- ▶ Analisi del tempo
  - ▶  $n$  passi e passo  $i$  richiede  $n - i + 1$  confronti

$$\sum_{i=1}^n (n - i + 1) = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} = O(n^2)$$

- ▶ Vedrete algoritmi più efficienti

## Esponenziale versus polinomiale

- ▶ Due miliardi di operazioni al secondo

## Esponenziale versus polinomiale

- ▶ Due miliardi di operazioni al secondo
- ▶ Esponenziale

| $n$          | 10    | 20          | 30    | 40 | 50 | 60  | 70   |
|--------------|-------|-------------|-------|----|----|-----|------|
| tempo: $2^n$ | 512ns | 524 $\mu$ s | 537ms | 9m | 7g | 18a | 187s |

## Esponenziale versus polinomiale

- ▶ Due miliardi di operazioni al secondo
- ▶ Esponenziale

| $n$          | 10    | 20          | 30    | 40 | 50 | 60  | 70   |
|--------------|-------|-------------|-------|----|----|-----|------|
| tempo: $2^n$ | 512ns | 524 $\mu$ s | 537ms | 9m | 7g | 18a | 187s |

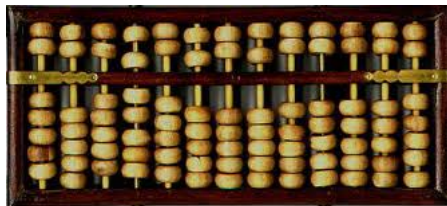
- ▶ Quadratico

| $n$          | 10   | 20    | 30    | 40    | 50        | 60        | 70        |
|--------------|------|-------|-------|-------|-----------|-----------|-----------|
| tempo: $n^2$ | 50ns | 200ns | 450ns | 800ns | 1 $\mu$ s | 2 $\mu$ s | 3 $\mu$ s |

## Nozioni di base

- ▶ Un calcolatore consiste di hardware e di software
  - ▶ **Hardware**: unità di elaborazione centrale, memoria principale, memoria ausiliaria, periferiche
  - ▶ **Software**: istruzioni raccolte in programma

## Primi strumenti di calcolo

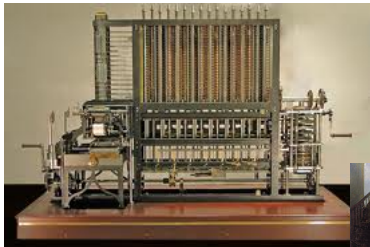


## Primi strumenti di calcolo

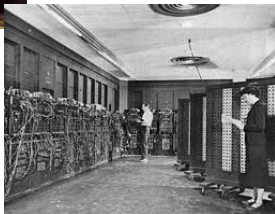
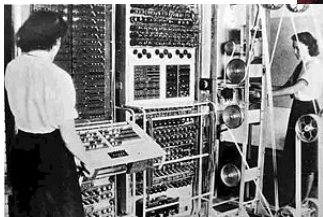
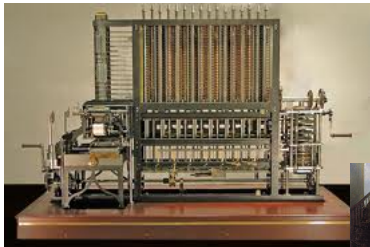




## Primi calcolatori



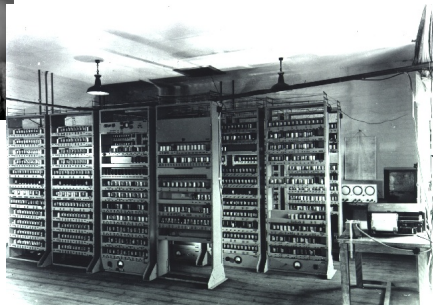
## Primi calcolatori



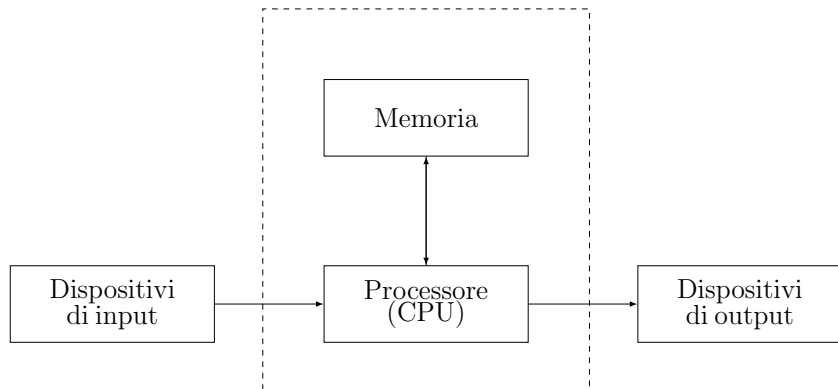
## La macchina di Von Neumann



## La macchina di Von Neumann



## Componenti hardware principali



## Componenti hardware principali

- ▶ **CPU:** dispositivo che esegue le istruzioni di un programma
  - ▶ Solo operazioni molto semplici, come trasferimento di un dato oppure operazioni aritmetiche elementari
- ▶ **Memoria principale:** veloce, ma costosa e volatile (conserva il programma attualmente in esecuzione ed i dati da esso usati)
- ▶ **Memoria ausiliaria:** meno costosa e che perdura anche in assenza di elettricità, ma più lenta (utilizzata per conservare programmi e dati in modo più o meno permanente)

- ▶ **Bit:** può assumere due soli valori (0 ed 1)
- ▶ **Byte:** pari a 8 bit ( $2^8$  possibili valori)
- ▶ **Locazione di memoria:** sequenza di byte adiacenti associata al dato il cui indirizzo è l'indirizzo del primo byte di sequenza

| INDIRIZZO | DATO     |                        |
|-----------|----------|------------------------|
| ...       | ...      | ...                    |
| 484       | 00011110 | Primo dato:<br>2 byte  |
| 485       | 00001001 |                        |
| 486       | 00000100 | Secondo dato: 1 byte   |
| 487       | 01001100 | Terzo dato:<br>4 byte  |
| 488       | 01111100 |                        |
| 489       | 01010101 |                        |
| 490       | 01001001 |                        |
| 491       | 01000111 | Quarto dato:<br>2 byte |
| 492       | 01001001 |                        |
| ...       | ...      | ...                    |

# Codice ASCII

|      | 000 | 001 | 010 | 011 | 100 | 101 | 110 | 111 |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 0000 |     | □   | □   | □   | □   | □   | □   | □   |
| 0001 | □   |     |     |     |     |     | □   | □   |
| 0010 | □   | □   | □   | □   | □   | □   | □   | □   |
| 0011 | □   | □   | □   | □   | □   | □   | □   | □   |
| 0100 |     | !   | "   | #   | \$  | %   | &   | '   |
| 0101 | (   | )   | *   | +   | ,   | -   | .   | /   |
| 0110 | 0   | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   |
| 0111 | 8   | 9   | :   | ;   | <   | =   | >   | ?   |
| 1000 | @   | A   | B   | C   | D   | E   | F   | G   |
| 1001 | H   | I   | J   | K   | L   | M   | N   | O   |
| 1010 | P   | Q   | R   | S   | T   | U   | V   | W   |
| 1011 | X   | Y   | Z   | [   | \   | ]   | ^   | _   |
| 1100 | '   | a   | b   | c   | d   | e   | f   | g   |
| 1101 | h   | i   | j   | k   | l   | m   | n   | o   |
| 1110 | p   | q   | r   | s   | t   | u   | v   | w   |
| 1111 | x   | y   | z   | {   |     | }   | ~   | □   |

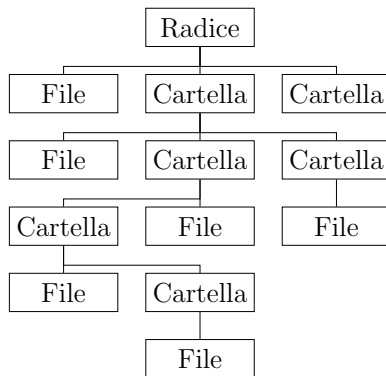


## Numerazone binaria

- ▶ Come in quella decimale, posizione di una cifra indica valore relativo
  - ▶ Il sistema binario usa potenze crescenti di 2

| BINARIO | DECIMALE | BINARIO | DECIMALE |
|---------|----------|---------|----------|
| 0000    | 0        | 1000    | 8        |
| 0001    | 1        | 1001    | 9        |
| 0010    | 2        | 1010    | 10       |
| 0011    | 3        | 1011    | 11       |
| 0100    | 4        | 1100    | 12       |
| 0101    | 5        | 1101    | 13       |
| 0110    | 6        | 1110    | 14       |
| 0111    | 7        | 1111    | 15       |

- ▶ Notazione realmente usata: complemento a due



## Algoritmi e programmi

- ▶ **Informatica:** fusione di *informazione* e *automatica*
  - ▶ Studio sistematico degli algoritmi che descrivono e trasformano l'informazione: la loro teoria, analisi, progetto, efficienza, realizzazione e applicazione
- ▶ **Algoritmo:** successione finita di istruzioni o passi che definiscono le operazioni da eseguire su dei dati (che formano l'istanza di un problema) per ottenere dei risultati (intesi come la soluzione dell'istanza specificata)
  - ▶ Interagisce con un ambiente esterno dal quale acquisisce dei dati e verso il quale comunica dati o messaggi

## Equazione di primo grado

1. Inizio dell'algoritmo {
2. leggi i coefficienti  $a$  e  $b$ ;
3. se  $a \neq 0$ ,  $x = -b/a$ ; vai a 6;
4. se  $b \neq 0$ , comunica che l'equazione è impossibile; vai a 7;
5. comunica che l'equazione è indeterminata; vai a 7;
6. comunica il valore di  $x$ ;
7. } Fine dell'algoritmo

## Equazione di secondo grado

1. Inizio dell'algoritmo {
2. leggi i coefficienti  $a$ ,  $b$  e  $c$ ;
3.  $\Delta = b^2 - 4ac$ ;
4. se  $\Delta < 0$ , comunica che l'equazione è impossibile; vai a 7;
5.  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  e  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ;
6. comunica i valori di  $x_1$  e  $x_2$ ;
7. } Fine dell'algoritmo

## Somma di numeri interi

1. Inizio dell'algoritmo {
2. leggi  $n$ ;
3.  $i = 0$  e  $s = 0$ ;
4. se  $i > n$ , vai a 6;
5. aggiungi  $i$  a  $s$  e incrementa  $i$  di 1; vai a 4;
6. comunica il valore di  $s$ ;
7. } Fine dell'algoritmo

## Somma di numeri interi

1. Inizio dell'algoritmo {
2. leggi  $n$ ;
3.  $i = 0$  e  $s = 0$ ;
4. se  $i > n$ , vai a 6;
5. aggiungi  $i$  a  $s$  e incrementa  $i$  di 1; vai a 4;
6. comunica il valore di  $s$ ;
7. } Fine dell'algoritmo

### Formula di Gauss

1. Inizio dell'algoritmo {
2. leggi  $n$ ;
3.  $s = \frac{n(n+1)}{2}$ ; comunica il valore di  $s$ ;
4. } Fine dell'algoritmo

## Il problema delle 12 monete

- ▶ Di 12 monete, una (e una sola) è falsa (peso diverso)
- ▶ Problema: disponendo di bilancia a 2 piatti, individuare moneta falsa e stabilire se più pesante o più leggera



## Il problema delle 12 monete

- ▶ Di 12 monete, una (e una sola) è falsa (peso diverso)
- ▶ Problema: disponendo di bilancia a 2 piatti, individuare moneta falsa e stabilire se più pesante o più leggera
  - ▶ Numero possibili soluzioni: 24

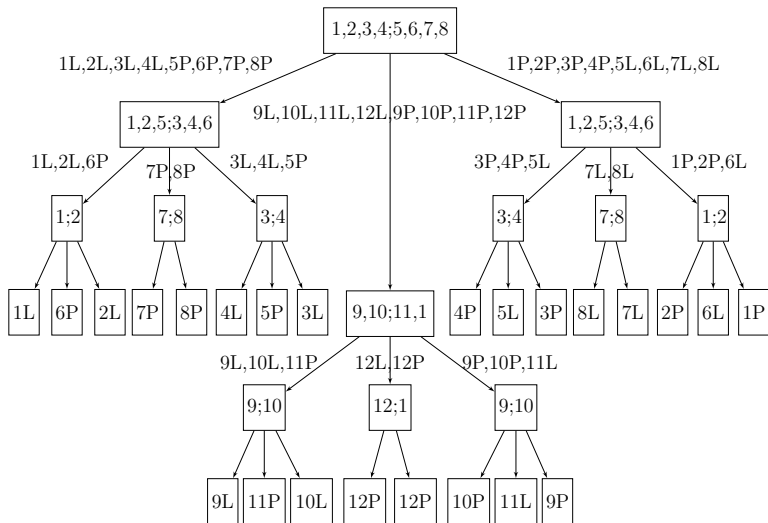
## Il problema delle 12 monete

- ▶ Di 12 monete, una (e una sola) è falsa (peso diverso)
- ▶ Problema: disponendo di bilancia a 2 piatti, individuare moneta falsa e stabilire se più pesante o più leggera
  - ▶ Numero possibili soluzioni: 24
  - ▶ Ogni pesata genera 3 alternative
    - ▶ 1 pesata distingue fra 3 situazioni differenti
    - ▶ 2 pesate possono distinguere tra 9 situazioni differenti
    - ▶ 3 pesate possono distinguere tra 27 situazioni differenti
  - ▶ Non si può risolvere il problema con meno di 3 pesate
  - ▶ Esiste un algoritmo che impieghi effettivamente 3 pesate?

## Il problema delle 12 monete

- ▶ Di 12 monete, una (e una sola) è falsa (peso diverso)
- ▶ Problema: disponendo di bilancia a 2 piatti, individuare moneta falsa e stabilire se più pesante o più leggera
  - ▶ Numero possibili soluzioni: 24
  - ▶ Ogni pesata genera 3 alternative
    - ▶ 1 pesata distingue fra 3 situazioni differenti
    - ▶ 2 pesate possono distinguere tra 9 situazioni differenti
    - ▶ 3 pesate possono distinguere tra 27 situazioni differenti
  - ▶ Non si può risolvere il problema con meno di 3 pesate
  - ▶ Esiste un algoritmo che impieghi effettivamente 3 pesate?
    - ▶ Confrontare inizialmente 2 monete non porta a soluzione: 20 soluzioni con 2 pesate
    - ▶ Confrontare due coppie di monete: 16 soluzioni con 2 pesate
    - ▶ Confrontare terne di monete: 12 soluzioni con 2 pesate

## Soluzione al problema delle 12 monete

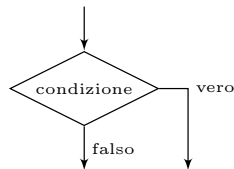
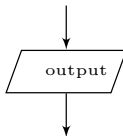
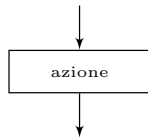
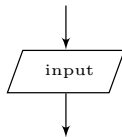


# Proprietà degli algoritmi

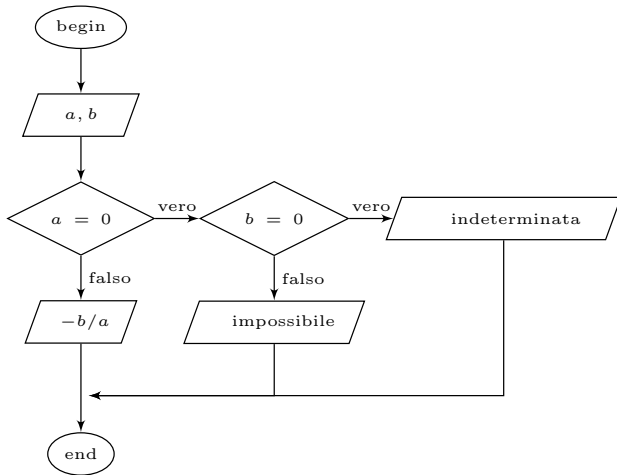
- ▶ Un algoritmo deve essere
  - ▶ Finito
  - ▶ Generale
  - ▶ Non ambiguo
  - ▶ Corretto
  - ▶ Efficiente

## Descrizione degli algoritmi

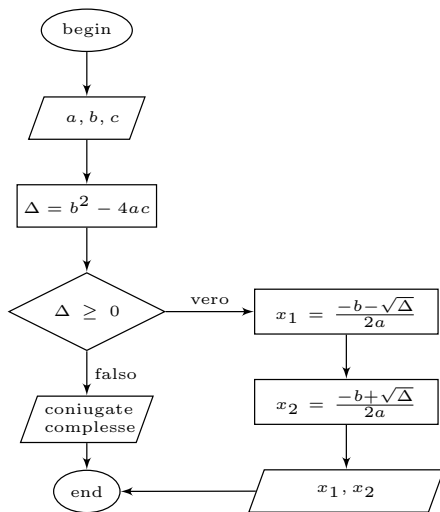
- ▶ Linguaggio di programmazione
- ▶ Pseudo-codice
- ▶ Diagrammi a blocchi



## Diagrammi a blocchi ed equazioni di primo grado

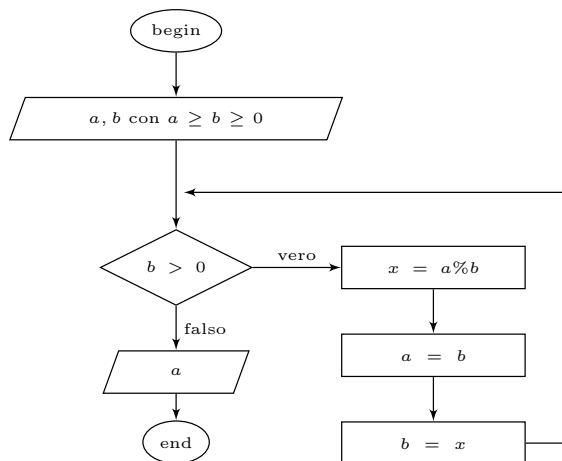


## Diagrammi a blocchi ed equazioni di secondo grado





## Diagrammi a blocchi e algoritmo di Euclide



# Programmi

- ▶ Programma: algoritmo scritto in linguaggio di programmazione
- ▶ Opera su
  - ▶ Dati in input
  - ▶ Dati di supporto
- ▶ Produce dati in output
- ▶ Diversi tipi
  - ▶ Sistema operativo
  - ▶ Programmi applicativi
    - ▶ Già esistenti
    - ▶ Creati dall'utente

▶ **Linguaggio macchina**

- ▶ Consiste di sequenze di 0 e 1
- ▶ Eseguito direttamente dal calcolatore

▶ **Linguaggio assembler**

- ▶ Di tipo simbolico
- ▶ Richiede una traduzione aggiuntiva molto semplice

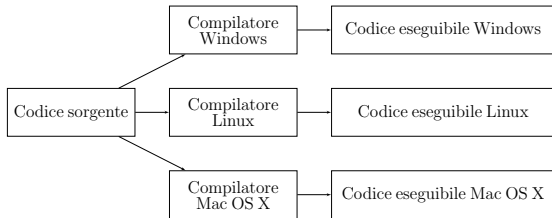
▶ **Linguaggio ad alto livello**

- ▶ Compromesso tra linguaggio naturale e linguaggio macchina
- ▶ Esempi: FORTRAN, ALGOL, COBOL, LISP, APL, PROLOG, BASIC, Pascal, C, Ada, C++, Java, Python

▶ Esempio: somma di due numeri

- ▶ Linguaggio macchina:  
000000000010000011000001000000100000
- ▶ Linguaggio assembler: add \$3, \$2, \$1
- ▶ Linguaggio ad alto livello: c = a+b;

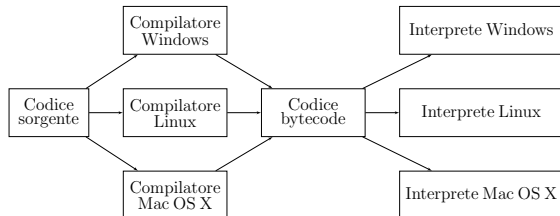
- ▶ **Compilatore:** traduce programma in linguaggio ad alto livello in programma in linguaggio macchina (più o meno)



- ▶ **Interprete:** traduce ed esegue una dopo l'altra istruzioni programma sorgente

## L'approccio di Java

- ▶ Uso di codice intermedio detto byte-code
  - ▶ Linguaggio macchina di calcolatore virtuale



- ▶ Principale vantaggio: portabilità